Collection Spirales

Conforme aux nouveaux programmes

Mathématiques

Exercices et Problèmes Corrigés

Analyse et Probabilités

6ème année

Mathématiques
Sciences Expérimentales
Techniques

Ben Bader Mejdi
El Ouni Monji
Ben Saâd Ridha
Juini Habib

Mathématiques

Exercices et Problèmes
Corrigés

Analyse & Probabilités

6ème année

Mathématiques
Sciences Expérimentales
Techniques

Ben Bader Mejdi
El Ouni Mongi
Ben Saâd Ridha
Juini Habib

ISBN : 9973 - 17 - 408 - 9

Editions AFAK 1994

Impression - Impremerie Principale

Z.I. Ben Arous - Tél. : 380 201

Tous les droits sont réservés à l'éditeur

Avant-Propos

Le présent ouvrage est le premier, des deux tomes, conçus dans le souci de répondre aux directives des nouveaux programmes de mathématiques définis par le decrêt du 29 Mars 1993 et dans l'objectif de développer le savoir et le savoir-faire chez l'élève.

Ce manuel d'exercices et problèmes de mathématiques est réservé aux élèves de la $6^{ème}$ année secondaire, options, mathématiques, sciences expérimentales et techniques.

Nous souhaitons que cet ouvrage présente un outil utile et agréable.

Nous accueillerons, avec reconnaissance, les critiques et suggestions susceptibles d'améliorer cet ouvrage.

Les Auteurs

Suites réelles

Exercices

Exercice 1

On considère la suite (U_n) définie par :

Pour tout entier naturel n : $U_n = n^2 - 2$

1) a) Calculer U_1 ; U_2 ; U_3 et U_4

b) Calculer pour tout entier naturel n

U_{n+1} ; $U_n + 1$; $(U_n)^2$; U_{n^2} ; U_{2n+3} ; $2U_n + 3$

2) a) Calculer $\sum_{p=0}^{5} U_p$ $\sum_{k=0}^{6} U_k$

b) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

$$\sum_{p=0}^{n+1} U_p - \sum_{p=0}^{n} U_p \quad ; \quad \sum_{p=0}^{n+1} U_p - \sum_{p=1}^{n-1} U_p \quad ; \quad \sum_{p=0}^{n+2} U_p - \sum_{k=0}^{n} U_k$$

Exercice 2 (N.C)

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$U_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

1) Calculer U_1 ; U_2 ; U_3 et U_{18}

2) a) Vérifier que pour tout réel non nul x différent de -1 on a :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

b) Calculer pour tout entier naturel non nul n : $S_n = \sum_{p=1}^{n} U_p$

c) Calculer $S_{n+1} - S_n$ et $\frac{S_{n+1}}{S_n}$

Exercice 3

1) Montrer que si les réels a, b et c sont 3 termes consécutifs d'une suite arithmétique alors il en est de même des réels A, B et C suivants :

$A = b^2 + bc + c^2$ $\quad B = c^2 + ca + a^2$ $\quad C = a^2 + ab + b^2$

2) Soient a, b et c trois réels non nuls.

Montrer que si $\frac{1}{a}$; $\frac{1}{b}$ et $\frac{1}{c}$ sont 3 termes consécutifs d'une suite arithmétique :

il en est de mêmes des réels $A = \frac{b+c}{a}$, $B = \frac{a+c}{b}$ et $C = \frac{a+b}{c}$

Exercice 4 (N.C)

Soit $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1/2\}$

Montrez que les réels A, B et C suivants sont 3 termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$A = \frac{2a^2 - a + 1}{2a^2 - a} \qquad B = \frac{2a}{2a - 1} \qquad C = \frac{a + 1}{a}$$

Exercice 5

Déterminer trois termes consécutifs a, b et c d'une suite arithmétique tels que :

$$\begin{cases} a + b + c = 333 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 37209 \end{cases}$$

Exercice 6

Déterminer dans chacun des cas suivants les termes consécutifs a, b, c, d et e d'une suite arithmétique tels que :

1) $\begin{cases} a + b + c + d + e = 80 \\ a\,b\,c\,d\,e = 576576 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a + b + c + d + e = 10 \\ a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 = 1540 \end{cases}$

Exercice 7

Les angles d'un triangle rectangle ABC sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique et son périmètre est 24.

Calculer les côtés de ce triangle.

Exercice 8 (N.C)

Soit ABC un triangle rectangle en A

Montrer que si AB, AC et BC sont 3 termes consécutifs d'une suite arithmétique alors le triangle ABC est semblable au triangle de côté 3, 4 et 5.

Exercice 9 (N.C)

Déterminer dans chacun des cas suivants trois termes consécutifs a, b et c d'une suite géométrique tels que :

1) $\begin{cases} a + b + c = 63 \\ a\,b\,c = 1728 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a + b + c = 312 \\ c - a = 192 \end{cases}$

Exercice 10

a) Montrez que si a, b et c sont 3 termes consécutifs d'une suite géométrique alors

$(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$

b) **Application :** Trouver trois termes consécutifs d'une suite géométrique connaissant leur somme 91 et la somme de leurs carrés 4459.

Exercice 11 (N.C)

Déterminer dans chacun des cas suivants cinq termes consécutifs a, b, c, d et e d'une suite géométrique tels que :

1) $\begin{cases} a \cdot e = 144 \\ b + c + d = 63 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a + c + e = 21 \\ b + d = 10 \end{cases}$

3) $\begin{cases} a+b+c+d+e = 3124 \\ a\,b\,c\,d\,e = 10^{10} \end{cases}$

On sera amené à résoudre l'équation : $\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q} + 1 + q + q^2 = 3124$

et on posera $X = q + \frac{1}{q}$

Exercice 12 (N.C)

Déterminer sept termes consécutifs d'une suite géométrique sachant que la somme de trois premiers termes est 2 et celle des trois derniers est 1250.

Exercice 13

Déterminer les réels x, y et z tels que :

$\begin{cases} x, y, z \text{ soient trois termes consécutifs d'une suite arithmétique} \\ y, z, x \text{ ceux d'une suite géométrique} \\ x + y + z = 15 \end{cases}$

Exercice 14 (N.C)

Déterminer l'ensemble des couples (a,b) de réels qui satisfont aux conditions :

• b + 1, 2a, 2a + b sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

• b, 2a, 10a - 4b sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

On précisera pour chaque couple solution, la raison correspondante de chaque suite.

Exercice15

u_1 ; u_n ; r et S_n désignent respectivement le premier terme, le $n^{ème}$ terme, la raison et la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique (u_n).

Calculer :

a) u_1 et S_n sachant que $u_n = 400$ $n = 128$ et $r = 3$.

b) u_1 et u_n sachant que $n = 60$ $r = -8$ et $S_n = -9960$.

c) u_n et S_n sachant que $u_1 = 7$ $n = 120$ et $r = 5$.

d) r et S_n sachant que $u_1 = 185$ $u_n = -2452$ et $n = 880$.

e) n et r sachant que $u_1 = 3$ $u_n = 39$ et $S_n = 210$.

f) u_1 et U_n sachant que $u_n = 117$ $n = 17$ et $S_n = 1037$.

g) n et U_n sachant que $u_1 = 50$ $r = -4$ et $S_n = 330$.

h) n et U_1 sachant que $u_n = 18$ $r = 2$ et $S_n = 88$.

i) n et S_n sachant que $u_1 = 8$ $r = 2$ et $u_n = 62$.

j) u_n et r sachant que $u_1 = 5$ $n = 9$ et $S_n = 144$.

k) u_1 et r sachant que $\sum_{k=5}^{10} u_k = 87$ et $\sum_{k=11}^{80} U_k = 1$.

Exercice 16

u_1 ; u_n ; q et S_n désignent respectivement le premier terme, le $n^{ème}$ terme, la raison et la somme des n premiers termes d'une suite géométrique.

Calculer :

a) u_n et S_n sachant que $u_1 = -1$ $q = 3$ et $n = 10$.

b) q et S_n sachant que $u_1 = 2$ $u_n = 32$ et $n = 5$.

c) u_1 et S_n sachant que $u_n = -48$ $q = -2$ et $n = 5$.

d) u_1 et u_n sachant que $q = 0,5$ $n = 7$ et $S_n = 571,5$.

e) n et q sachant que $u_1 = 48$ $u_n = 243$ et $S_n = 633$.

f) n et u_n sachant que $u_1 = 128$ $q = 0,5$ et $S_n = 255$.

g) n et u_1 sachant que $u_n = 7$ $q = 1/3$ et $S_n = 2548$.

Exercice 17

Soit (u_n) une suite rèelle telque pour tout entier naturel n on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = 3n^2 + \sqrt{2}(n+1) - 3$$

1) Calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n)

2) Exprimer u_n en fonction de n. En déduire la nature de (u_n)

Exercice18

Soit (v_n) une suite réelle telle que par tout entier naturel n on a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = \frac{1}{4^{2n+1}} - 4$$

1) Montrer que la suite (v_n) est une suite géometrique dont on preçisera le premier terme v_0 et la raison q.

2) Determiner $\lim_{n \to \infty} v_n$

Exercice19

Soit (w_n) une suite réelle telle que pour tout $n \in IN$, on a $P_n = w_0.w_1 \ldots\ldots w_n = \frac{1}{7(n+1)^2}$

1) Calculer w_n en fonction n

2) En deduire la nature de (w_n) et $\lim_{n \to \infty} w_n$

Exercice 20 (N.C)

Soit (u_n) la suite réelle définie sur IN par : $Un = (\sqrt{2} - 1)^{n+5}$

1) Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison q.

2) Exprimer en fonction de n la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

3) Determiner $\lim_{n \to \infty} u_n$

4) Soit (v_n) la suite réelle définie par $v_n = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \cdot u_{2n+1}$ $(n \in IN)$

a) Déterminer la nature de (v_n)

b) Déterminer $\lim_{n \to \infty} v_n$ et exprimer en fonction de n la somme $S'_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$

Exercice 21 (N.C)

1) La plante que vous venez d'acheter mesure 0.50m et doit grandir de 0.30m la première année, puis, chaque année des $\frac{9}{10}$ de la hauteur gagnée l'année précédente

La hauteur du sous-plafond de votre logement est 2,50 m

Au bout de combient d'annèe seriez-vous contraint de céder cette plante à un ami plus spacieusement logé.

2) Vous choisissez une plante de 0,50 m de hauteur qui grandit de h_1 la première année puis chaque année des $\frac{9}{10}$ de la hauteur gagnée l'année précédente.

Quelle est la valeur maximale e h_1 pour que votre plante n'atteigne jamais le plafond ?

Exercice 22

Pour tout entier naturel non nul n, on pose U_n = 1 1 1 ..... 1 (n chiffres)

Exemple U_3 = 111

Pour tout a $\in$ {1,2,3,4,5,6,7,8,9}, on pose $S_n(a) = a + aa + aaa + ... + \underbrace{aaa...a}_{n \text{ chiffres}}$

Exemple $S_3(9) = 9 + 99 + 999 = 1107$

1) Ecrire U_n en fonction de n

2) En déduire une expression de $S_n(1) = U_1 + U_2 ... + U_n$ en fonction de n.

3) Exprimer $S_n(a)$ en fonction de n et a

Vérifier pour n = 3 et a = 9

4) Calculer $S = S_n(1) + S_n(2) + ... + S_n(9)$

Exercice 23 (N.C)

c) Un village a une population de 2500 habitants en fin 1992 et on désigne par U_n sa population en fin de (1992 + n)

Des études statistiques ont montré que $U_n = U_{n-1} + 50$ ($n \in IN^*$)

a) Quelle est la nature de cette suite ?

b) Calculer alors U_n en fonction de n.

c) A partir de quelle année la population de ce village aura-t-elle doublé ?

2) Une ville a une population de 250 000 habitants en fin 1992 et on désigne par V_n sa population en fin de (1992 + n).

Des études statistiques ont montré que la population de cette ville augmente annuellement de 3%.

a) Exprimer V_n en fonction de n

b) a partir de quelle année la population de cette ville aura-t-elle doublé.

Exercice 24 (N.C)

On considère un carré $A_0\ B_0\ C_0\ D_0$ de côté $c_0 = a$ soient A_1, B_1, C_1 et D_1 les milieux respectifs des segments $[A_0\ B_0]$, $[B_0\ C_0]$, $[C_0\ D_0]$, $[D_0\ A_0]$, on obtient ainsi le carré $A_1\ B_1\ C_1\ D_1$ de côté de longueur c_1.

Soient A_2, B_2, C_2, D_2 les milieux respectifs de $[A_1\ B_1]$, $[B_1\ C_1]$ $[C_1\ D_1]$ $[D_1\ A_1]$.

Le carré $A_2\ B_2\ C_2\ D_2$ est de côté de longueur c_2 On opère comme précédemment, pour obtenir les carrés $A_3\ B_3\ C_3\ D_3$ ..., $A_n\ B_n\ C_n\ D_n$, ...

1) Calculer c_1, c_2, c_3 et donner une conjecture sur c_n

2) Montrer que c_n est le terme général d'une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

3) Déterminer une conjecture sur la limite de la somme des périmètres de ces carrés.

4) Déterminer une conjecture sur la limite de la somme des aires de ces carrés.

Exercice 25 (N.C)

Soit (U_n) la suite réelle définie sur IN par :

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ \text{pour tout entier naturel n ; } 4U_{n+1} = U_n + 12 \end{cases}$$

1) Calculer les cinq premiers termes de la suite (U_n)

2) Soit (V_n) la suite numérique définie sur IN par $V_n = U_n - 4$

Montrer que (V_n) est une suite géométrique

3) En déduire U_n en fonction de n

4) On pose $S_n = \sum_{j=0}^{n-1} U_j$ Exprimer S_n en fonction de n.

Exercice 26 (N.C)

Soit (U_n) la suite numérique définie sur IN par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \qquad U_1 = \pi \\ \text{pour tout entier naturel n : } U_{n+2} = 2U_{n+1} - U_n \end{cases}$$

1) Déterminer les 6 premiers termes de la suite (U_n)

2) Soit (V_n) la suite réelle définie sur IN par :

$V_n = U_{n+1} - U_n$

a) Montrer que la suite (V_n) est une suite constante

b) En déduire U_n en fonction de n

c) Calculer $S_n = \sum_{j=0}^{n-1} U_j \; ; n \in IN^*$

Exercice 27 (N.C)

Soit (V_n) la suite définie sur IN par :

$$\begin{cases} V_0 = -1 \; ; V_1 = 3 \\ 3V_{n+2} = 5V_{n+1} - 2V_n \end{cases}$$

1) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = V_{n+1} - V_n \qquad (n \in IN)$

Montrer que (U_n) est un suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison q.

2) On pose $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} U_i \qquad n \in IN^*$

a) Exprimez S_n en fonction de n

b) En déduire V_n en fonction de n.

Exercice 28 (N.C)

a étant un réel, on considère la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \quad \text{et} \quad U_1 = 3 \\ \text{Pour tout entier n} \;, \; U_{n+2} = \frac{1}{2} a^2 U_{n+1} + (a-3) Un \end{cases}$$

On définit aussi la suite (V_n) par : Pour tout entier naturel n, $V_n = U_{n+1} - U_n$

1) Dans cette question on pose a = 2

a) Montrer que pour tout n ; $V_n = 2$

b) En déduire U_n et $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} U_i$ en fonction de n

c) En déduire la somme des entiers naturels impairs inférieur à 100.

2) Dans cette question on pose a = -4

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique

b) Exprimer V_n et $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} V_i$ en fonction de n.

c) Déduire alors U_n en fonction de n.

Exercice 29

A) U_1 et a étant deux réels donnés :

On considère la suite (U_n) définie par :

Pour tout $n \in IN^*$: $U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n + a$

1) Montrer qu'il existe un réel b tel que la suite (V_n) définie sur IN* par : $V_n = U_n - b$

soit une suite géométrique.

2) Calculer $\Sigma_n = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$ et en déduire

$S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$ en fonction de U_1 ; a et n.

B) Soit W_0 ; W_1 deux réels donnés.

On considère la suite (W_n) définie sur IN par :

pour tout $n \in IN^*$; $2W_{n+1} - 3W_n + W_{n-1} = 0$

1) En utilisant la suite de terme général $t_n = W_n - \frac{1}{2} W_{n-1}$

Montrer que $W_{n+1} - \frac{1}{2} W_n$ est indépendnant de n, et déterminer sa valeur en fonction de W_0 et W_1.

2) En utilisant la partie A : Exprimer :

$S'_n = W_0 + W_1 + \ldots + W_n$ en fonction de n, W_0 et W_1.

Exercice 30

Soit (U_n) la suite numérique définie sur IN par :

$$U_0 = 0 \quad U_{n+1} = \frac{2 + U_n}{1 + 2U_n}$$

1) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq U_n \leq 2$

2) Soit la suite (V_n) définie sur IN par : $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 1}$

Montrer que (V_n) est une suite géométrique convergente.

3) Soit $n \in IN$: exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

4) Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$|U_n - 1| < 3|V_n|$$

Exercice 31 (N.C)

Soit (U_n) la suite réelle définie sur IN par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout entier naturel n : } U_{n+1} = \frac{-7U_n - 8}{2U_n + 1} \end{cases}$$

1) Calculer les 5 premiers termes de la suite (U_n)

2) On suppose que (U_n) est définie.

Montrer par recurrence que pour tout entier n ; $U_n \neq -2$

3) Soit (V_n) la suite définie par son terme général $V_n = \frac{2U_n + 1}{U_n + 2}$

Montrer que la suite (V_n) est une suite arithmétique.

4) Soit $n \in IN$: exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

5) Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout entier n tel que $n > n_0$ on ait

$$|U_n + 2| < \frac{2}{n}$$

Exercice 32 (N.C)

Soit (U_n) la suite définie sur IN par : $u_0 = 2$ et $U_{n+1} = \frac{2U_n}{(U_n)^2 + 4}$

1) Calculer U_1 ; U_2 et U_3

2) a) Montrer par recurrence que pout tout entier naturel n : $U_n > 0$

b) En déduire le signe de $(U_{n+1} - U_n)$; $n \in IN$

3) a) Montrer que pour tout entier n : $U_{n+1} < \frac{1}{2} U_n$

b) En déduire que pour tout entier n : $U_{n+1} < (\frac{1}{2})^n$

4) Utiliser votre calculatrice pour montrer qu'il existe un entier n_0 tel que l'on ait : pour tout entier n ; $n > n_0$ on a : $0 < U_n < 4x10^{-3}$

Exercice 33

Soit g la fonction définie sur IR \ {4} par : $g(x) = \frac{-4}{x - 4}$

1) Etudier la fonction g;

2) Contruire dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction g et la droite D d'équation y = x.

3) Soit (U_n) la suite numérique définie sur IN par :

$$u_0 = -4 \quad U_{n+1} = \frac{-4}{U_n - 4}$$

a) En utilisant le graphique, construire sur l'axe des abscisses (O, i) les termes u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 de la suite (U_n).

b) On suppose que la suite (U_n) est définie

Montrer que pour tout $n \in IN$, $U_n \neq 2$

4) Soit (V_n) la suite réelle définie sur IN par : $V_n = \frac{1}{U_n - 2}$

a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique.

b) En déduire V_n en fonction de n.

c) Exprimer alors U_n en fonction de n.

5) Calculer $\sum_{k=5}^{2n-1} V_k$ en fonction de n, $n \in IN$ et $n \geq 3$

Exercice 34 (N.C)

A) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction définie sur IR+ par : $f(x) = x^2$

1) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ et la droite D d'équation $y = x$

2) Utiliser la courbe $\mathcal{C}$ pour représenter sur l'axe des ordonnées $(O, \vec{j})$

u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 les termes de la suite (U_n) définie sur IN par $U_n = f(n)$

3) Utiliser la courbe $\mathcal{C}$ et la droite D pour représenter sur l'axe des abscisses $(O, \vec{i})$ les termes v_0 ; v_1 ; v_2 ; v_3 de la suite (V_n) définie dans chaucun des cas suivants par :

a) $V_0 = 0,5 \quad V_{n+1} = f(V_n) \qquad n \in IN$

b) $V_0 = 1,1 \quad V_n = f(V_{n-1}) \quad n \in IN^*$

B) Soit (V_n) la suite définie des A/-3/-b'/

1) Calculer les 5 premiers termes de la suite (V_n).

2) a) Montrer par recurrence que pour tout entier n on a $Vn > 1$

b) Comparer $\frac{V_{n+1}}{V_n}$ et 1

c) En utilisant l'inégalité $V_7 > 1,9 \times 10^5$, trouver les entiers n tel que $V_n > 10^{21}$

3) Montrer par recurrence que pour tout entier naturel n, on a : $V_n = (1,1)^{2^n}$

Exercice 35 (N.C)

I - On considère l'application f définie sur IR par $f(x) = \frac{1}{2} x + 1$ et la suite (U_n) définie sur IN par : U_0 donné et pour tout $n \in IN$ $U_{n+1} = f(U_n)$

1) Etudiez le signe de $f(x) - x$ quand x parcourt IR.

2) a) On suppose $U_0 = 2$: Montrer alors que (U_n) est une suite constante.

b) On suppose que $U_0 \in]-\infty, 2[$.

Montrez par recurrence que pour tout $n \in IN$ $U_n \in]-\infty, 2[$.

(On admet dans ce qui suit que si $U_0 \in]2 ; +\infty[$ alors pour tout $n \in IN$ $U_n \in]2 ; +\infty[$).

3) Etudiez suivant les valeurs de U_0 le signe de $U_{n+1} - U_n$

4) On pose dans cette question $U_0 = -1$

Montrez que la suite (V_n) de terme général $(V_n = U_n - 2)$ est ne suite géométrique.

Déduire U_n en fonction de n.

II - Soit la suite (W_n) définie sur IN par :

$$W_0 = 0 \text{ et pour tout } n \in IN : W_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+2)} W_n + \frac{3}{2(n+2)}$$

1) Calculer W_1 ; W_2 et W_3

2) Montrer que la suite de terme général $(n+1)\,W_n - 1$ est la suite (U_n) de la question I) 4).

Exercice 36 **(N.C)**

On se propose dans cet exercice, d'établir l'égalité

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2 \quad \textbf{(E)}$$

1ère Méthode :

a) Montrer, par recurrence, que pour tout entier naturel non nul n on a :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}$$

b) En déduire l'égalité (E).

2ème Méthode :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points A_1 ; A_2 ; ... A_n de $(O, \vec{i})$ d'abscisse respectives :

$$a_1 = 1 \; ; \; a_2 = 1 + 2 \; ; \; \ldots \; a_n = 1 + 2 + \ldots + n$$

et les carrés $OA_1B_1C_1$; $OA_2B_2C_2$ ... $OA_nB_nC_n$ construit à partir de ces points (B_i et C_i sont d'ordonnées positives).

a) Faire une figure pour n = 4

b) Calculer l'aire du carré $OA_nB_n\,C_n$.

En déduire que l'aire du polygone $A_{n-1}A_nB_nC_nC_{n-1}B_{n-1}$ est égale à n^3.

Prouver l'égalité (E).

Cette deuxième méthode est dûe au mathématicien arabe Al-Kharagi (Fin du 10ème siècle début du 11ème siècle).

Corrigés

Exercice 1

1) a) Pour tout entier naturel n ; $u_n = n^2 - 2$

$u_1 = -1$ $\quad u_2 = 2$ $\quad u_3 = 7$ $\quad u_{14} = 194$

b) $U_{n+1} = (n+1)^2 - 2 = n^2 + 2n - 1$; $(U_n)^2 = (n^2 - 2)^2 = n^4 - 4n^2 + 4$

$U_n + 1 = n^2 - 2 + 1 = n^2 - 1$; $U_{(n^2)} = (n^2)^2 - 2 = n^4 - 2$

$U_{2n+3} = (2n + 3)^2 - 2$; $2U_n + 3 = 2(n^2 - 2) + 3$

$= 4n^2 + 12n + 7$ $\quad = 2n^2 - 1$

2) a) $\sum_{p=0}^{5} u_p = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$

$= (-2) + (-1) + 2 + 7 + 14 + 23 = 43$

$\sum_{p=0}^{6} u_p = \sum_{p=0}^{5} u_p + u_6 = 43 + 34 = 77$

b) $\sum_{p=0}^{n+1} U_p - \sum_{p=0}^{n} U_p = U_{n+1} = n^2 + 2n - 1$

$\sum_{p=0}^{n+1} U_p - \sum_{p=1}^{n-1} U_p = U_0 + U_n + U_{n+1} = 2n^2 + 2n - 5$

$\sum_{p=0}^{n+2} U_p - \sum_{k=1}^{n} U_k = U_{n+1} + U_{n+2} = 2n^2 + 6n + 1$

Exercice 3

2) On a $\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{a+c}{a.c}$

$A + C = \frac{b+c}{a} + \frac{a+b}{c} = \frac{a^2}{a.c} + \frac{c^2}{a.c} + \frac{b(a+c)}{a.c}$

$= \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + b\,\frac{2}{b} = \frac{(a+c)^2}{a.c} = \frac{2}{b}(a+c) = 2B$

D'où si $\frac{1}{a}$; $\frac{1}{b}$ et $\frac{1}{c}$ sont 3 termes consécutifs d'une suite arithmétique alors il en est de même des réels A, B et C.

Exercice 5

1) Soit r la raison de la suite dont a, b, c sont des termes consécutifs : on a $a = b - r$

$c = b + r$

$$\begin{cases} a + b + c = 333 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 37209 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b = 333 \\ (b - r)^2 + b^2 + (b + r)^2 = 37209 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 111 \\ 3 \times 111^2 + 2r^2 = 37209 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 111 \\ r = \sqrt{123} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b = 111 \\ r = -\sqrt{123} \end{cases}$$

d'où $\begin{cases} a = 111 - \sqrt{123} \\ b = 111 \\ c = 111 + \sqrt{123} \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = 111 + \sqrt{123} \\ b = 111 \\ c = 111 - \sqrt{123} \end{cases}$

Exercice 6

2) $a = c - 2r$, $b = c - r$, $d = c + r$, $e = c + 2r$

$$\begin{cases} a = + b + c + d + e = 1 \\ a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 = 1540 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5c = 10 \\ (c-2r)^3 + (c-r)^3 + c^3 + (c+r)^3 + (c+2r)^3 = 1540 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5c = 10 \\ (2 - 2r)^3 + (2-r)^3 + 2^3 + (2+r)^3 + (2+2r)^3 = 1540 \end{cases} \quad (2)$$

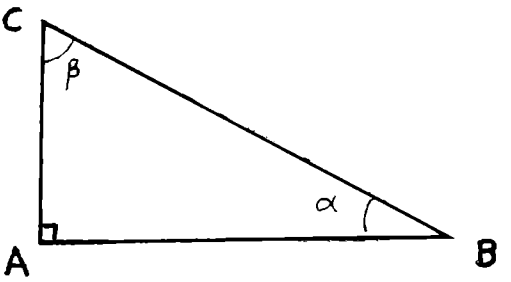
(2) : $8(1-r)^3 + (2-r)^3 + 8 + (2+r)^3 + 8\,(1+r)^3 = 1540$

$\Leftrightarrow 60r^2 + 40 = 1540 \Leftrightarrow 60r^2 = 1500$

$\Leftrightarrow r^2 = 25 \Leftrightarrow r = 5$ ou $r = -5$

d'où $\begin{cases} a = -8 \\ b = -3 \\ c = 2 \\ d = 7 \\ e = 12 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = 12 \\ b = 7 \\ c = 2 \\ d = -3 \\ e = -8 \end{cases}$

Exercice 7



On suppose que $\alpha \leq \beta$

on a $\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} + \alpha = 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \\ \alpha - 2\beta = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\beta = \pi \\ \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{6} \\ \beta = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

$AB = BC \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} BC$ $\qquad$ $AC = BC \sin\alpha = \frac{1}{2} BC$

$AB + AC + BC = 24 \Leftrightarrow BC \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = 24 \Leftrightarrow BC \frac{3+\sqrt{3}}{2} = 24$

$\Leftrightarrow BC = 8(3 - \sqrt{3})$

$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} 8(3 - \sqrt{3}) = 12(\sqrt{3} - 1)$ $\qquad$ et $AC = 4(3 - \sqrt{3})$

Eercice 10

a) a, b et c sont 3 termes consécutifs d'une suite géométrique si et seulement si $ac = b^2$

$(a + b + c)(a - b + c) = (a + c)^2 - b^2 = (a + c)^2 - ac = a^2 + ac + c^2$

$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + ac + c^2$

d'où on a : $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$

b) $\begin{cases} a+b+c = 91 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 4459 \\ ac = b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ac = b^2 \\ a+b+c = 91 \\ (a+b+c)(a-b+c) = 4459 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ac = b^2 \\ a+b+c = 91 \\ a-b+c = 49 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ac = b^2 \\ a+c = 70 \\ b = 21 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ac = 441 \\ a+c = 70 \\ b = 210 \end{cases}$

donc a et c sont racines de l'équation $x^2 - 70x + 441 = 0$

$\Delta' = 1225 - 441 = 784 = 28^2$

d'où $x' = 35 + 28 = 63$ $x'' = 35 - 28 = 7$

et par suite on aura $\begin{cases} a = 7 \\ b = 21 \\ c = 63 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = 63 \\ b = 21 \\ c = 7 \end{cases}$

Exercice 13

x, y et z trois termes consécutifs d'un suite arithméthique si et seulement si $2y = x + z$.

y, z et x trois termes consecutifs d'une suite géométrique si et seulement si $z^2 = xy$

$\begin{cases} 2y = x+z \\ x+y+z = 15 \\ z^2 = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x+z = 10 \\ z^2 = 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 10-z \\ z^2 = 5(10-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 10-z \\ z^2 + 5z - 50 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 5 \\ x = 10 - z \\ z = 5 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = 5 \\ x = 10 - z \\ z = -10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \\ z = 5 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 20 \\ y = 5 \\ z = -10 \end{cases}$$

Exercice 15

(U_n) est une suite arithmétique de premier terme U_1 et de raison r.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$u_n = u_1 + (n - 1)\,r \qquad S_n = \dfrac{n(U_1 + U_n)}{2} = n\,U_1 + \dfrac{n(n-1)\,r}{2}$

a) $u_n = 400 \quad n = 128 \quad$ et $\quad r = 3 \Rightarrow u_1 = 19$ et $S_n = 26\,816.$

b) $n = 60 \quad r = -8 \quad$ et $\quad S_n = -9960 \Rightarrow u_1 = 70$ et $U_n = U_{60} = -402.$

c) $u_1 = 7 \quad n = 120 \quad$ et $\quad r = 5 \Rightarrow u_n = 602$ et $S_n = 36\,540.$

d) $u_1 = 185 \quad u_n = -2452 \quad$ et $\quad n = 880 \Rightarrow r = -3$ et $S_n = -997\,480.$

e) $u_1 = 3 \quad u_n = 39 \quad$ et $\quad S_n = 210 \Rightarrow n = 10$ et $r = 4.$

f) $u_1 = 117 \quad n = 17 \quad$ et $\quad S_n = 1037 \Rightarrow u_1 = 7$ et $r = 7.$

g) $u_1 = 50 \quad r = -4 \quad$ et $\quad S_n = 330 \Rightarrow$ $\begin{cases} n = 15 \text{ et } U_n = -6 \\ \text{ou} \\ n = 11 \text{ et } U_n = 10. \end{cases}$

h) $u_n = 18 \quad r = 2 \quad$ et $\quad S_n = 88 \Rightarrow$ $\begin{cases} n = 11 \text{ et } U_1 = -2 \\ \text{ou} \\ n = 8 \text{ et } U_1 = 4 \end{cases}$

i) $U_1 = 8 \quad r = 2 \quad$ et $\quad U_n = 62 \Rightarrow n = 28$ et $S_n = 980$

j) $u_1 = 5 \quad n = 9 \quad$ et $\quad S_n = 144 \Rightarrow U_n = 27$ et $r = \dfrac{11}{4}$

k) $\sum_{k=1}^{10} U_k = 87$ et $\sum_{k=11}^{80} U_k = 1 \quad \Rightarrow \quad r = \dfrac{-507}{1330}$ et $\quad U_1 = \dfrac{45161}{2660}$

Exercice 16

(U_n) est une suite géométrique de premier terme U_1 et de raison q.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$U_n = U_1\, q^{n-1}$ et $S_n = U_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

a) $U_1 = -1$ $q = 3$ et $n = 10 \Rightarrow$ $u_n = -19\,683$ et $S_n = -29\,524$.

b) $U_1 = 2$ $U_n = 32$ $n = 5 \Rightarrow$ $\begin{cases} q = 2 \text{ et } S_n = 62 \\ \text{ou} \\ q = -2 \text{ et } S_n = 22. \end{cases}$

c) $U_n = -48$ $q = -2$ et $n = 5 \Rightarrow$ $u_1 = -3$ et $S_n = -33$.

d) $q = \dfrac{1}{2}$ $n = 7$ et $S_n = \dfrac{1143}{2}$ $\Rightarrow u_1 = 288$ et $u_n = \dfrac{9}{2}$

e) $U_1 = 48$ $u_n = 243$ et $S_n = 633 \Rightarrow$ $q = 1{,}5$ et $n = 5$.

f) $u_1 = 128$ $q = 0{,}5$ et $S_n = 255 \Rightarrow$ $n = 8$ et $u_n = 1$.

g) $u_1 = 7$ $q = \dfrac{1}{3}$ et $S_n = 2548 \Rightarrow$ $U_1 = 1701$ et $n = 6$

Exercice 17

Pour tout entier naturel n on a :

$S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k = 3n^2 + \sqrt{2}(n + 1) - 3$

1) $U_0 = S_0 = \sqrt{2} - 3$

Pour tout entier naturel non nul n on a $S_n = S_{n-1} + U_n$

d'où $U_n = S_n - S_{n-1}$ donc $U_1 = S_1 - S_0 = 2\sqrt{2} - (\sqrt{2} - 3) = 3 + \sqrt{2}$

$U_2 = S_2 - S_1 = (12 + 3\sqrt{2} - 3) - (2\sqrt{2}) = 9 + \sqrt{2}$

$U_3 = S_3 - S_2 = (27 + 4\sqrt{2} - 3) - (12 + 3\sqrt{2} - 3) = 15 + \sqrt{2}$

2) Pour tout entier naturel non nul n on a $U_n = S_n - S_{n-1}$

$U_n = [3n^2 + \sqrt{2}(n-1) - 3] - [3(n-1)^2 + n\sqrt{2} - 2]$

$= [3n^2 + \sqrt{2}\,n + \sqrt{2} - 3] - [3n^2 - 6n + n\sqrt{2}] = 6n - 3 + \sqrt{2}$

$U_0 = -3 + \sqrt{2} = 6 \cdot 0 - 3 + \sqrt{2}$

Donc pour tout $n \in IN$ on a $U_n = 6n - 3 + \sqrt{2}$

3) Le terme général de la suite (U_n) est de la forme $U_n = an + b$ avec $a = 6$ et $b = -3 + \sqrt{2}$

d'ou (U_n) est une suite arithmétique de premier terme $U_0 = -3 + \sqrt{2}$ et de raison $r = 6$

Exercice 18

1) $S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k = \dfrac{1}{4^{2n+1}} - 4$

Pour tout $n \in IN^*$ on a : $V_n = S_n - S_{n-1} = (\dfrac{1}{4^{2n+1}} - 4) - (\dfrac{1}{4^{2n-1}} - 4)$

D'où $V_n = \dfrac{1}{4^{2n-1}} (\dfrac{1}{16} - 1) = \dfrac{-15}{4} (\dfrac{1}{4^{2n}}) = \dfrac{-15}{4} (\dfrac{1}{16})^n$

et $V_0 = S_0 = \dfrac{-15}{4} = \dfrac{-15}{4} (\dfrac{1}{16})^0$

Donc pour tout $n \in IN$ on a : $V_n = \dfrac{-15}{4} (\dfrac{1}{16})^n$

donc V_n est une suite géométrique de premier terme $V_0 = \dfrac{-15}{4}$ et de raison $r = \dfrac{1}{16}$

2) V_n est une suite géometrique de raison $r = \dfrac{1}{16}$, $0 < \dfrac{1}{16} < 1$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$

Exercice 19

$P_n = W_0 W_1 W_2 \cdots\cdots W_n = \dfrac{1}{7^{(n+1)^2}}$ donc $W_0 = P_0 = \dfrac{1}{7}$

Pour tout $n \in IN^*$ on a : $W_n = \dfrac{P_n}{P_{n-1}} = \dfrac{\dfrac{1}{7^{(n+1)^2}}}{\dfrac{1}{7^{(n)^2}}} = \dfrac{1}{7^{2n+1}}$

Donc $W_n = \dfrac{1}{7} (\dfrac{1}{7^{2n}}) = W_0 (\dfrac{1}{49})^n$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \frac{1}{7} \left(\frac{1}{49} \right)^n$

Donc (W_n) est une géométrique de premier terme $W_0 = \frac{1}{7}$ et de raison $\frac{1}{49}$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = 0$

Exercice 22

1) $U_n = 1 + 10 + 10^2 + \ldots\ldots + 10^{n-1} = \frac{1}{9} (10^n - 1)$

Exemple $U_3 = \frac{1}{9} (10^3 - 1) = 111$

2) $S_n(1) = U_1 + U_2 + \cdots + U_n = \frac{1}{9} (10 - 1) + \frac{1}{9} (10^2 - 1) + \cdots + \frac{1}{9} (10^n - 1)$

$$= \frac{1}{9} (10 + 10^2 + \cdots + 10^n) - \frac{n}{9} = \frac{1}{9} \left(10. \frac{10^n - 1}{10 - 1}\right) - \frac{n}{9}$$

D'où $S_n(1) = \frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{81}$

3) a) $S_n(a) = aU_1 + aU_2 + \cdots + a U_n = aS_n(1) = a \frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{81}$

b) $n = 3$ et $a = 9$

$S_3(9) = 9 \frac{10^4 - 10 - 27}{81} = 1107$

c) $S = S_n(1) + S_n(2) + \cdots + S_n(9) = \frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{81} (1+2+\cdots+9) = 45 \frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{81}$

Exercice 29

A/ Pour tout $n \geq 1$, $U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n + a$

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+1} = U_{n+1} + b = \frac{1}{2} U_n + a + b = \frac{1}{2} (V_n - b) + a + b$

D'où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n + a + \frac{1}{2} \cdot b$

Pour que (V_n) soit une suite géométrique il suffit que $a + \frac{1}{2} b = 0$ c'est à dire $b = -2a$

La suite (V_n) est alors une suite géométrique de raison $r = \frac{1}{2}$ et de premier terme $V_1 = U_1 - 2a$

2) $s_n = \sum_{i=1}^{i=n} V_i = V_1 \dfrac{1 - (\frac{1}{2})^n}{\frac{1}{2}} = 2V_1 \left(1 - (\frac{1}{2})^n\right) = 2(U_1 - 2a)\,(1 - (\frac{1}{2})^n)$

$$S_n = \sum_{i=1}^{i=n} U_i = \sum_{i=1}^{i=n} (V_i + 2a) = \sum_{i=1}^{i=n} V_i + 2na = 2(U_1 - 2a)\left(1 - (\frac{1}{2})^n\right) + 2na$$

B/ 1) $t_n = W_n - \frac{1}{2} W_{n-1}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $t_{n+1} = W_{n+1} - \frac{1}{2} W_n = \frac{3}{2} W_n - \frac{1}{2} W_{n-1} - \frac{1}{2} W_n$

Soit $t_{n+1} = W_n - \frac{1}{2} W_{n-1} = t_n$

Donc (t_n) est une suite constante et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $t_n = t_1 = W_1 - \frac{1}{2} \cdot W_0$

D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $W_{n+1} - \frac{1}{2} W_n = W_1 - \frac{1}{2} W_0$

c'est à dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $W_{n+1} = \frac{1}{2} W_n + (W_1 - \frac{1}{2} W_0)$

La suite (W_n) est du même type que (U_n) définie en **A/** avec $a = W_1 - \frac{1}{2} W_0$

d'où $S'_n = \sum_{i=0}^{n} W_i = W_0 + 2(W_1 - 2W_1 + W_0)\left(1 - (\frac{1}{2})^n\right) + 2n\,(W_1 - \frac{1}{2} W_0)$

Soit $S'_n = W_0 + 2(W_0 - W_1)\left(1 - (\frac{1}{2})^n\right) + 2n\,(W_1 - \frac{1}{2} W_0)$

Exercice 30

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{2+U_n}{1+2U_n} \end{cases}$$

1) montrons par recurrence que pour tout entier naturel n on a $0 \le U_n \le 2$

$U_0 = 0$ donc $0 \le U_0 \le 2$

Soit $p \in IN$; supposons que $0 \le U_p \le 2$ et montrons que $0 \le U_{p+1} \le 2$

$$U_{p+1} = \frac{2+U_p}{1+2U_p} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2(1+2U_p)}$$

$$\text{Or } 0 \le Up \le 2 \Rightarrow 1 \le 1 + 2U_p \le 5 \Rightarrow \frac{1}{5} \le \frac{1}{1+2U_p} \le 1$$

$$\Rightarrow \frac{3}{10} \le \frac{3}{2(1+2U_p)} \le \frac{3}{2}$$

$$\text{D'où } \frac{8}{10} \le \frac{3}{2(1+2U_p)} + \frac{1}{2} \le 2 \quad \text{Ainsi } 0 \le U_{p+1} \le 2$$

Donc pour tout entier naturel n on a : $0 \le U_n \le 2$

$$2)\ V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 1}{U_{n+1} + 1} = \frac{\dfrac{2 + U_n}{1 + 2U_n} - 1}{\dfrac{2 + U_n}{1 + 2U_n} + 1} = \frac{1 - U_n}{3\,(U_n + 1)} = \left(\frac{-1}{3}\right) \frac{U_n - 1}{U_n + 1}$$

$$\text{Soit } V_{n+1} = \left(\frac{-1}{3}\right) V_n$$

D'où (V_n) est une suite géométrique de premier terme $V_0 = -1$ et de raison $q = \dfrac{-1}{3}$

$0 < |\, q \,| < 1 \Rightarrow (V_n)$ est convergente.

3) Pour tout $n \in IN$, $V_n = V_0\, q^n = -\left(\dfrac{-1}{3}\right)^n$; $V_n \neq 1$

$$V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 1} \Leftrightarrow V_n\,(U_n + 1) = U_n - 1 \Leftrightarrow U_n\,(V_n - 1) = -1 - V_n$$

D'où $U_n = \dfrac{V_n + 1}{1 - V_n} = \dfrac{1 - (\frac{-1}{3})^n}{1 + (\frac{-1}{3})^n}$

4) $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 1} \Leftrightarrow U_n - 1 = (U_n + 1) V_n \Rightarrow | U_n - 1 | = | U_n + 1 | | V_n |$

Or $0 \leq U_n \leq 2$, alors $| 1 + U_n | \leq 3$ d'où $| U_n - 1 | \leq 3 | V_n |$

Exercice 33

$g(x) = \dfrac{-4}{x - 4}$

• g est définie si est seulement si $x-4 \neq 0$, d'où $D_g =]-\infty, 4[\cup]4, +\infty[$

• **Variations :**

Soient x_1 et x_2 deux réels de l'intervalle $]-\infty, 4[$ tels que $x_1 < x_2$

On a alors $x_1 - 4 < x_2 - 4$ et comme $x_1 - 4$ et $x_2 - 4$ sont strictements négatifs on a alors:

$$\frac{1}{x_1 - 4} > \frac{1}{x_2 - 4} \text{ et par suite } \frac{-4}{x_1 - 4} < \frac{-4}{x_2 - 4}$$

C'est à dire $g(x_1) < g(x_2)$ d'où g est strictement croissante sur $]-\infty, 4[$

On montre de même que g est strictement croissante sur $]4, +\infty[$

La courbe représentative $\mathcal{C}$ de g est une hyperbole ayant pour asymptotes les droites d'équation (x = 4) et (y=0)

O' (4,0) est le centre de symetrie de $\mathcal{C}$ (Voir la courbe $\mathcal{C}$ dans la page suivante)

3) a) Voir figure

b) $\begin{cases} U_0 = -4 \\ U_{n+1} = \dfrac{-4}{U_n - 4} \end{cases}$

Montrons par récurrence que pour tout entier n ; $U_n \neq 2$

$$U_0 = -4 \neq 2$$

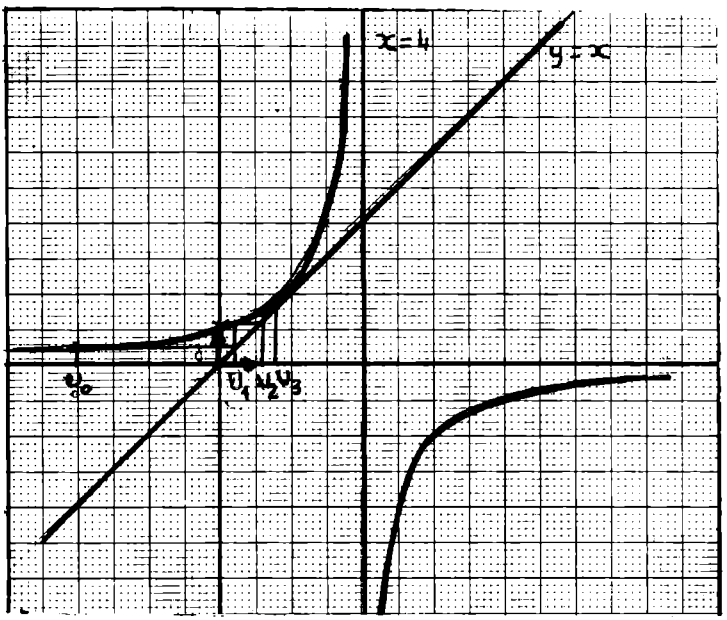
Soit P ∈ IN ; supposons que $U_p \neq 2$, et montrons que $U_{p+1} \neq 2$

supposons que $U_{p+1} = 2$ donc $\frac{-4}{U_p - 4} = 2$

$2U_p - 8 = -4$ c'est à dire $U_p = 2$ ce qui est impossible car on a supposé que $U_p \neq 2$

d'où $U_{p+1} \neq 2$

Donc pour tout entier n ; $U_n \neq 2$,



4) a) $V_n = \frac{1}{U_n - 2}$

$$V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1} - 2} = \frac{1}{\frac{-4}{U_n - 4} - 2} = \frac{1}{\frac{-2U_n + 4}{U_n - 4}} = \frac{U_n - 4}{-2(U_n - 2)}$$

$$= \frac{-1}{2} V_n \left(\frac{-1}{V_n} - 2 \right) = -\frac{1}{2} + V_n$$

d'où (V_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme

$V_0 = \frac{1}{U_0 - 2} = -\frac{1}{6}$

b) Pour tout entier naturel n, $V_n = -\frac{1}{2}n - \frac{1}{6}$

c) $V_n = \frac{1}{U_n - 2} \Leftrightarrow U_n - 2 = \frac{1}{V_n}$

$$\Leftrightarrow U_n = \frac{2V_n + 1}{V_n} = \frac{6n - 4}{3n + 1}$$

4) $\sum_{k=5}^{2n-1} V_k = \frac{(2n - 1 - 5 + 1)(V_5 + V_{2n-1})}{2}$

$$= \frac{(2n - 5)\left(-n - \frac{14}{6}\right)}{2}$$

LIMITES ET CONTINUITE

Exercices

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, répondre par vrai ou faux et justifier votre réponse.

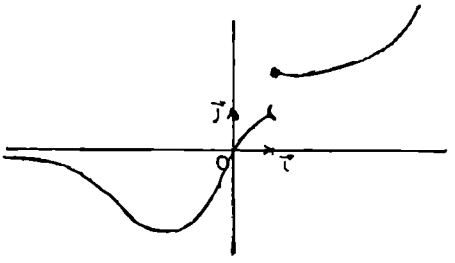
1) Si f et g sont deux fonctions ayant la même limite en $+\infty$, alors $(\frac{f}{g})$ a pour limite 1 en $+\infty$

2) Si f et g sont deux fonction ayant la même limite en x_0, alors $(\frac{f}{g})$ a pour limite 1en x_0.

3) Si f admet une limite en $+\infty$ ainsi que (f+g), alors la fonction g admet une limte en $+\infty$.

Exercice 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ soit (C) la courbe représentative d'une fonction f .



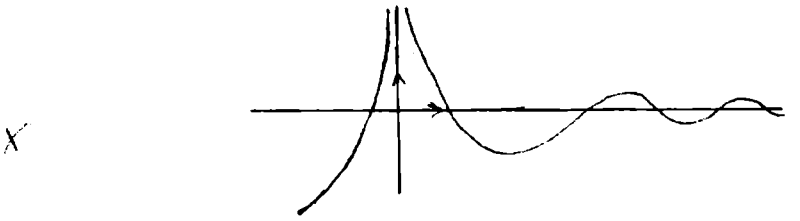
compléter :

$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ ---- $\lim_{----} f(x) = 1$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$ - - - -

$D_f =$ ---- $f(1) =$ ----

Exercice 3

Reprendre l'énoncé précédent pour la courbe ci-dessous :



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = - - -$ $\lim_{- - -} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to 0+} f(x) = - - -$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$

Exercice 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O , \vec{i} , \vec{j})$.Dans chacun des cas suivants , donner une allure plausible, de la représentation graphique (C) de la fonction f pour que f vérifie les conditions données:

1) $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} f(x) = + \infty \\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = - 1 \\ f(0) = -2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \lim_{x \to 0+} f(x) = + \infty \\ \lim_{x \to 0-} f(x) = - \infty \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = + \infty \end{cases}$

3) $\begin{cases} \lim_{1^+} f(x) = 1 \\ \lim_{1^-} f(x) = - 1 \\ \lim_{+\infty} f(x) = + \infty \\ \lim_{-\infty} f(x) = - \infty \\ f(1) = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \lim_{0^-} f(x) = - \infty \\ \lim_{0^+} f(x) = 1 \\ \lim_{+\infty} f(x) = - \infty \\ \lim_{-\infty} f(x) = 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Exercice 5

Soient [OI) et [OI') deux demi-droites du plan. A est un point variable sur [OI) et A' est le point de [OI') tel que l'on ait (IA') et (I'A) parallèles.

1) Donner au point A plusieurs positions sur [OI) de plus en plus éloignées du point O. Construire les points A' correspondants . Que peut - on conjecturer ?

2) On munit la demi - droite [OI) du repère (O , I) et [OI') du repère (O ,I')

On désigne par x l'abscisse de A et x' celle de A' respectivement dans les repères (O , I) et (O , I'). Exprimer x' en fonction de x . Démontrer alors la conjecture faite en 1).

Exercice 6

Soit la fonction définie sur [1 , + ∞ [par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{x}$

1) Vérifier que pour tout $x \in [\,1\,,+\infty\,[$ on a : $\sqrt{x^2 - 1} \geq x - 1$

2) Démontrer que pour tout $x \in [\,1\,,+\infty\,[$ on a : $\dfrac{2x - 1}{x} \leq f(x) \leq 2$

3)Sachant que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donner la limite de f (x) en + ∞

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur IR* par $f(x) = x.\sin \dfrac{1}{x}$

1) A l'aide d'une calculatrice, compléter le tableau suivant .

x en rd	$\frac{1}{2}$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-4}	-10^{-3}	-10^{-5}
f(x)						

Que peut - on conjecturer ?

2) Montrer que pour tout $x \in IR^*$, on a $|f(x)| < |x|$.

Prouver alors votre conjecture.

Exercice 8

Déterminer les limites éventuelles suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 9x + 4)(x + 1) - x^4 + 4x - 9$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 7}{x^3 - 5x + 1}$ 3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - 3}{x^2 - 3x}$

4) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 - 7x + 1}{x^2 - + x - 1}$

5) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 3}{x^2 - - 1}$

6) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x - 1}{x - 1}$

7) $\lim_{x \to 1} \dfrac{3x^2 - 5x + 2}{x - 1}$

8) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 8}$

9) $\lim_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x + 5} - 3}{x - 4}$

10) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 1} + 3}{\sqrt{x^2 - 1}}$

11) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} + 2x$

12) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} + x$

13) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 3x - 1} + x$

14) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} - \sqrt{x}$

15) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x - \sqrt{x + 2}}{\sqrt{4x + 1} - 3}$

16) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 4} - \sqrt{3x + 4}}{\sqrt{x + 1} - 1}$

17) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{x + 1}{\sqrt{x}}$

18) $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x - 1}}{\sqrt{x - 1}}$

19) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{tg^2 (2x)}$

20) $\lim_{x \to 0} \dfrac{tg\ 2x}{\sqrt{1 - \cos x}}$

21) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{(\sin (\pi x))^2}$

22) $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{tg\ 6x}{1 - 2 \sin x}$

23) $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2 \cos 2x - 1}{\cos 3x}$

24) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$

25) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{tgx}$

Exercice 9 **(N.C)**

Etudier dans chacun des cas suivants, la continuité de la fonction f sur son ensemble de définition :

1) $\begin{cases} f(x) = 1 - x & \text{si } x < 1 \\ f(x) = x^2 + x - 2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ f(x) = -4x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} f(x) = x^2 + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = 3x + 1 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ f(x) = \dfrac{x+5}{x-1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - x + 3}{x+2} & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{\sin(x-1)}{x} + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Exercice 10

Dans chacun des cas suivants , déterminer le réel a pour que la fonction f soit continue en x_0.

1) $\begin{cases} f(x) = x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = 3 - ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$; $x_0 = 1$

2) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x^2 + 5x - 7}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = a \end{cases}$; $x_0 = 1$

3) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2\sqrt{x+4} - \sqrt{16 - x}}{x} & \text{si } x \in [-4, 0[\cup]0, 16] \\ f(0) = a \end{cases}$; $x_0 = 0$

4) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^2+5}}{x^2 - 4} & \text{si } x \in [-1, 2[\cup]2, +\infty] \quad ; \quad x_0 = 2 \\ f(2) = a \end{cases}$

5) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}}{x} - \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in [-1, 0[\cup]0, +\infty] \quad ; \quad x_0 = 0 \\ f(0) = a \end{cases}$

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur IR par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{ax^2 + (a2 - 3)x - 3a}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = 4a \end{cases}$$

Déterminer les réels a pour que f soit continue en 1.

Exercice 12

soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) La fonction f admet - elle une limite finie en 0 ? En est - il de même en 1 et en (- 1)?

Exercice 13 (N.C)

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f ainsi que ses limites au bornes de D_f.

2) Montrer que pour tout $x \in D_f$ on a : $f(x) = \dfrac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}$

3) Soit g la fonction définie par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} - \dfrac{2}{x} & \text{si } x \in D_f \\ g(0) = 0 \end{cases}$

Etudier la continuité de g sur son ensemble de définition .

Exercice 14

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x + E(x - 1)$ où E est la fonction partie entière

Étudier la continuité de f en x_0 dans chacun des cas suivants :

a) $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

b) $x_0 \in \mathbb{Z}$

Exercice 15 (N.C)

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = x - E(x)$

1) Représenter la restriction de f à [-2 , 3 [

2) Etudier la continuité de f sur IR

3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) = f(x + 1)$

Interpréter graphiquement ce résultat

Exercice 16

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = x^2 + E\left(\frac{1}{1 - E(x^2)}\right)$$

1) Déterminer le domaine de définition de f.

Donner une forme plus simple de f(x) (on traitera séparément les cas $x \in]-1, 1[$

et $x \in]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$

2) Etudier la continuité de f en $\sqrt{2}$ et en $-\sqrt{2}$.

Exercice 17

Soit f la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = x\,E\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout réel x , x >0 ona : $0 \leq 1 - x\,E\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$

2) Trouver un encadrement de $\left(1 - x\,E\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ pour x stictement négatif .

En déduire une majoration de $\left| x\,E\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right|$ valable pour tout réel non nul x.

Que peut - on déduire sur la continuité de f en 0 ?

3) pour tout entier p, p ≥ 2 , simplifier l'expression de f (x) pour $x \in \left]\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p}\right[$.

Puis pour $x \in \left]\frac{1}{p}, \frac{1}{p-1}\right[$.

Etudier alors la continuité de f en $\frac{1}{p}$.

Corrigés

Exercice 1

1) cet énoncé est en général faux. On considère f (x) = 2x et g (x) = x et on a :

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} g(x) = +\infty$ et pourtant $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 2$

3) cet énoncé est en général faux . On considère f (x)= x et g (x) = sin x et on a

$\lim\limits_{+\infty} (f + g)(x) = +\infty$ et pourtant la fonction g n'admet pas de limite en $+\infty$

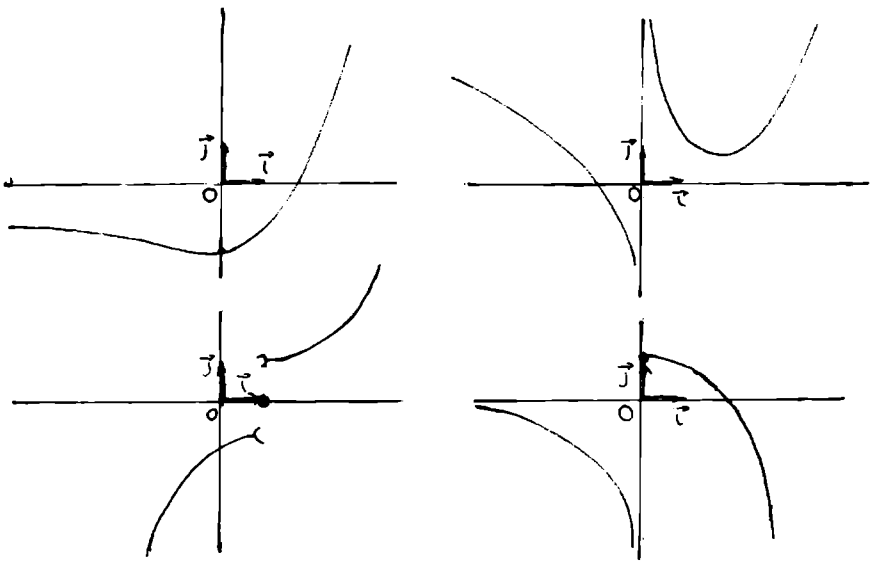
Exercice 2

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $D_f = \mathbb{R}$ et $f(1) = 2$

Exercice 3

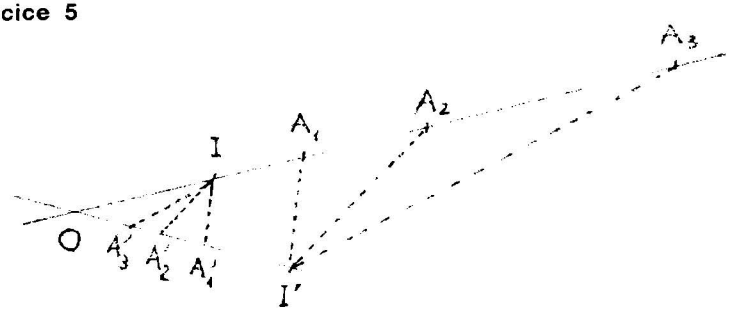
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

Exercice 4



Exercice 5

1)



Nous remarquons que si le point A s'éloigne de O, alors le point A' s'approchera de O

2) $\overline{OA} = x$ et $\overline{OA'} = x'$

Comme les droites (IA') et (I'A) sont parallèles , alors d'aprés l'énoncé de Thales on a :

$\frac{\overline{OI}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OI'}}$ c'est à dire $\frac{1}{x'} = \frac{x}{1}$ d'où $x' = \frac{1}{x}$

Ainsi si A s'éloigne de O signifie que x tend vers $+\infty$ Donc 1/x tend vers 0 ce qui signifie x' tend vers 0 , autrement dit le point A' s'approche de plus en plus du point O.

Exercice 6

$f(x) = \frac{\sqrt{x2 - 1} + x}{x}$ pour tout $x \in [1 , +\infty [$

1) On suppose qu'il existe $x_0 \in [1 , +\infty [$ tel que $\sqrt{x_0^2 - 1} < x_0 - 1$ **(1)**

Comme $x_0 - 1 \geq 0$ et $\sqrt{x_0^2 - 1} \geq 0$ alors **(1)** est équivalente à $(\sqrt{x_0^2 - 1})^2 < (x_0 - 1)^2$

c'est à dire $x_0^2 - 1 < x_0^2 - 2x_0 + 1$

Soit $2x_0 - 2 < 0$ c'est à dire $x_0 < 1$ ce qui est absurde

Donc pour tout $x \in [1 , +\infty [$ on a $\sqrt{x^2 - 1} \geq x - 1$

2) D'aprés 1) on a $\sqrt{x^2 - 1} \geq x - 1$ alors $\sqrt{x^2 - 1} + x \geq 2x - 1$

D'où pour tout $x \in [1 , +\infty[$; $\dfrac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{x} \geq \dfrac{2x - 1}{x}$

C'est à dire pour tout $x \in [1 , +\infty[$; $f(x) \geq \dfrac{2x - 1}{x}$

$f(x) - 2 = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{x} - 2 = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1} - x}{x}$

Or pour tout $x \in [1 , +\infty[$ on a $\sqrt{x^2 - 1} \leq \sqrt{x^2} \leq x$

D'où pour tout $x \in [1 , +\infty[$ on a $\dfrac{\sqrt{x^2 - 1} - x}{x} \leq 0$

C'est à dire pour tout $x \in [1 , +\infty[$ on a $f(x) \leq 2$

Ainsi pour tout $x \in [1 , +\infty[$ on a $\dfrac{2x - 1}{x} \leq f(x) \leq 2$

3)Pour tout $x \in [1 , +\infty[$ on a $-\dfrac{1}{x} \leq f(x) - 2 \leq 0$

D'où pour tout $x \in [1 , +\infty[$ on a $| f(x) - 2 | \leq \dfrac{1}{x}$

Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, $| f(x) - 2 | < \varepsilon$ pourvu que $\dfrac{1}{x} < \varepsilon$ c'est à dire $x > \dfrac{1}{\varepsilon}$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ $\left(\alpha = \sup\left(\dfrac{1}{\varepsilon} , 1\right)\right)$

tel que si $x > \alpha$ alors $| f(x) - 2 | < \varepsilon$

C'est à dire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

Exercice 7

$f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

1)

x en rd	$\frac{1}{2}$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	-10^{-4}
f(x)	0,239	-0,054	-0,005	0,0008	-310^{-5}

On conjecture que si x tend vers 0 , alors f (x) tend vers 0.

2) Pour tout $x \in IR^*$ on a $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$. Alors pour tout $x \in IR^*$ on a :

$|x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| < |x|$ c'est à dire pour tout $x \in IR^*$, $|f(x)| \leq |x|$.

Soit $\varepsilon > 0$, $|f(x)| < \varepsilon$ pourvu que $|x| < \varepsilon$.

Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha = \varepsilon$ tel que si $|x| < \alpha$ alors $|f(x)| < \varepsilon$ c'est à dire

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

Exercice 8

6) $\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 2x - 1}{x - 1} = -\infty$ et $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 2x - 1}{x - 1} = +\infty$

Alors f n'admet pas de limite en 1

9) On a $f(x) = \frac{\sqrt{x+5} - 3}{x - 4} = \frac{(\sqrt{x+5} - 3)(\sqrt{x+5} + 3)}{(x - 4)(\sqrt{x+5} + 3)} = \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x+5} + 3)}$

D'où $\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x+5} + 3} = \frac{1}{6}$

11) On a $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} + 2x = |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2x$

D'où $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x \left(-\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2\right) = -\infty$

12) On a $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} + x = \frac{(\sqrt{x^2 - x + 1} + x)(\sqrt{x^2 - x + 1} - x)}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x} = \frac{1 - x}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x}$

D'où $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(\frac{1}{x} - 1\right)}{x\left(-\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1\right)} = 1$

15) On a $f(x) = \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1} - 3} = \frac{(x - \sqrt{x+2})(x + \sqrt{x+2})(\sqrt{4x+1} + 3)}{(\sqrt{4x+1} - 3)(\sqrt{4x+1} + 3)(x + \sqrt{x+2})}$

$$= \frac{(x^2 - x - 2)(\sqrt{4x+1}+3)}{(4x-8)(x+\sqrt{x+2})} = \frac{(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x+\sqrt{x+2})}$$

D'où $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \frac{9}{8}$

18) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} + \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x}+1)}$

$$= \sqrt{x+1} + \frac{x-1}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x}+1)} = \sqrt{x+1} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+1}$$

D'où $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \sqrt{2}$

20) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\text{tg } 2x}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\text{tg } 2x}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\text{tg } 2x}{x} \sqrt{\frac{x^2}{1-\cos x}} = 2\sqrt{2}$$

$\cdot \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\text{tg } 2x}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\text{tg } 2x}{x} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\text{tg } 2x}{x} \left(-\sqrt{\frac{x^2}{1-\cos x}}\right)$

$= -2\sqrt{2}$

Alors cette fonction n'admet pas de limite en 0

22) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\text{tg } 6x}{1 - 2\sin x}$

On pose $x = \frac{\pi}{6} + h$, $h \in \mathbb{R}$ c'est à dire $x - \frac{\pi}{6} = h$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\text{tg } 6x}{1 - 2 \sin x} = \lim_{h \to 0} \frac{\text{tg } (6 (\frac{\pi}{6} + h))}{2 (\frac{1}{2} - \sin (\frac{\pi}{6} + h))}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\text{tg } (\pi + 6h)}{2 (\sin \frac{\pi}{6} - \sin (\frac{\pi}{6} + h))} = \lim_{h \to 0} \frac{\text{tg } 6h}{2 (\sin (\frac{-h}{2}) \cos (\frac{\pi}{6} + \frac{h}{2}))}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{- \text{tg } 6h}{4 \sin (\frac{h}{2}) \cos (\frac{\pi}{6} + \frac{h}{2}))} = -2\sqrt{3}$$

25) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\text{tg}x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x})(\sqrt{1 + \sin} + \sqrt{1 - \sin x})}{\text{tg}x (\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x})}$$

$$= \frac{2 \sin x}{\text{tg}x (\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x})} = 1$$

Exercice 10

3) $$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{2\sqrt{x + 4} - \sqrt{16 - x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{4 (x + 4) - (16 - x)}{x (2\sqrt{x + 4} + \sqrt{16 - x})} = \frac{5}{8}$$

Ainsi f est continue en 0 si et seulement si $a = \frac{5}{8}$

Exercice 11

On pose $g(x) = ax^2 + (a^2 - 3) x - 3a$. Si $g(1) \neq 0$, alors f ne possède pas de limite finie en 1, et par suite f ne serait pas continue en 1. Il est alors nécessaire que g (1) soit nulle pour qu'on puisse parler de continuité de f en 1

$g(1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 2a - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -1 \text{ ou } a = 3$

* $a = -1$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{-x^2 - 2x + 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(-x-3)}{x-1} = -4 \text{ et on a } f(1) = 4a = -4.$$

Alors f est continue en 1, pour $a = -1$

* $a = 3$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 + 6x - 9}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(3x+9)}{x-1} = 12 \text{ et on a } f(1) = 4a = 12.$$

Alors f est continue en1, pour $a = 3$.

Ainsi f est continue en 1 si et seulement si $a = -1$ ou $a = 3$

Exercice 12

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|}$$

1) f et définie en $x \Leftrightarrow x^2 - |x| \neq 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = |x|$

$x^2 = |x| \Leftrightarrow |x|^2 = |x| \Leftrightarrow |x|(|x| - 1) = 0$

$\Leftrightarrow |x| = 0$ ou $|x| = 1$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = -1$

Ainsi $D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$

$$2) \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{|x|^2 + |x|}{|x|^2 - |x|} = \lim_{x \to 0} \frac{|x| + 1}{|x| - 1} = -1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 + x}{x^2 - x} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{1 - x}{-1 - x} = -\infty$$

Alors f n'admet pas de limites finies en 1 et en (- 1).

Exercice 14

$f(x) = x + E(x - 1)$

a) $n \in \mathbb{Z}$, pour tout $x \in]n , n + 1[$, alors $(x - 1) \in]n - 1 , n[$.

D'où $E(x - 1) = n - 1$, donc $f(x) = x + n - 1$

Dans l'intervalle $]n , n + 1[$ ona $f(x) = x + (n - 1)$

Alors f est continue sur $]n , n - 1[$ comme réstriction d'une fonction polynôme

b) $x_0 \in \mathbb{Z}$.

On note $x_0 = n$, pour tout $x \in]n - 1 , n[$, on a $f(x) = x + n - 2$

Pour tout $x \in]n, n + 1[$, on a $f(x) = x + n - 1$

$\lim\limits_{x \to n^-} f(x) = \lim\limits_{x \to n^-} (x + n - 2) = 2n - 2$

$\lim\limits_{x \to n^+} f(x) = \lim\limits_{x \to n^+} (x + n - 1) = 2n - 1 = f(n)$.

Donc f est continue à droite en n et f n'est pas continue en n, pour tout $n \in \mathbb{Z}$

Exercice 16

$$f(x) = x^2 + E\left(\frac{1}{1 - E(x^2)}\right).$$

1) f est définie en x signifie $1 - E(x^2) \neq 0$

Soit un réel x, $E(x^2) = 1 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 < 2 \Leftrightarrow x \in]-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}[$

Alors $D_f =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup]-1, 1[\cup [\sqrt{2}, +\infty[$.

* Si $x \in]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$ alors $x^2 \geq 2$ donc $E(x^2) \geq 2$, d'où $1 - E(x^2) \leq -1$

Ainsi $$-1 \leq \frac{1}{1 - E(x^2)} < 0$$

Alors $E\left(\frac{1}{1 - E(x^2)}\right) = -1$

Donc pour tout $x \in]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$ on a $f(x) = x^2 - 1$

* Si $x \in]-1 , 1[$ alors $0 \leq x^2 < 1$ alors $E(x^2) = 0$

D'où $E\left(\frac{1}{1 - E(x^2)}\right) = 1$.

C'est à dire, pour tout $x \in]-1 , 1[$ $f(x) = x^2 + 1$

2) On a $f(-\sqrt{2}) = 1$

$$\lim_{x \to (-\sqrt{2})^-} f(x) = \lim_{x \to (-\sqrt{2})^-} (x^2 - 1) = 1 = f(-\sqrt{2})$$

Donc f est continue à gauche en $-\sqrt{2}$

On a $f(\sqrt{2}) = 1$

$$\lim_{x \to (-\sqrt{2})^+} f(x) = \lim_{x \to (-\sqrt{2})^+} (x^2 - 1) = 1 = f(\sqrt{2})$$

Donc f est continue à droite en $\sqrt{2}$.

Exercice 17

1) Pour tout réel t on a : $E(t) \leq t \leq E(t+1)$ $(E(t+1) = E(t) + 1)$ en particulier pour $t \in \mathbb{R}^*+$.

On pose dans ce cas $t = \frac{1}{x}$

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^*+$ on a : $E(\frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x} \leq E(\frac{1}{x}) + 1$

C'est à dire pour tout $x \in \mathbb{R}^*+$ on a

$$x E(\frac{1}{x}) \leq 1 \leq x(E(\frac{1}{x}) + 1)$$

D'où pour tout $x \in \mathbb{R}^*+$ on a $0 \leq 1 - x E(\frac{1}{x}) \leq x$

2) Pour tout $t \in \mathbb{R}^*-$, on pose $t = \frac{1}{x}$, alors on obtient $(x \in \mathbb{R}^*-)$

$$E(\frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x} \leq E(\frac{1}{x}) + 1$$

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^*-$ on a $x E(\frac{1}{x}) \geq 1 \geq x(E(\frac{1}{x}) + 1)$

D'où pour tout $x \in \mathbb{R}^*-$ on a $0 \geq 1 - x E(\frac{1}{x}) \geq x$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a :

$$0 \leq |1 - x E(\frac{1}{x})| \leq |x|$$

Soit $\varepsilon > 0$.

$|1 - x E(\frac{1}{x})| < \varepsilon$ pourvu que $|x| < \varepsilon$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha = \varepsilon$ tel que, si $|x| < \alpha$ alors $|1 - xE(\frac{1}{x})| < \varepsilon$

Ainsi $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$, c'est à dire f est continue en 0.

3) Soit p un entier naturel , $p \geq 2$

Soit $x \in] \frac{1}{p+1} , \frac{1}{p} [$ alors $\frac{1}{x} \in] p , p+1 [$ alors $E(\frac{1}{x}) = p$

D'où pour tout $x \in] \frac{1}{p+1} , \frac{1}{p} [$ on a $f(x) = p.x$

Soit $x \in] \frac{1}{p} , \frac{1}{p-1} [$ alors $\frac{1}{x} \in] p-1 , p [$ alors $E(\frac{1}{x}) = p-1$

D'où pour tout $x \in] \frac{1}{p} , \frac{1}{p-1} [$ on a $f(x) = (p-1)x$

$$\lim_{x \to (\frac{1}{p})^-} f(x) = \lim_{x \to (\frac{1}{p})^-} px = 1 = f(\frac{1}{p})$$

$$\lim_{x \to (\frac{1}{p})^+} f(x) = \lim_{x \to (\frac{1}{p})^+} (p-1)x = \frac{p-1}{p}$$

Alors f est continue à gauche en $\frac{1}{p}$ mais elle n'est pas continue en $\frac{1}{p}$,

pour tout $p \in IN$ et $p \geq 2$.

DERIVABILITE
EXTREMA ET SENS DE VARIATION

Exercices

Exercice 1 (N.C)

En utilisant la définition , déterminer le nombre dérivé éventuel de la fonction f en x_0

1) $f(x) = x^2 - 3x + 1$, $x_0 = 2$ 2) $f(x) = (2x+3)^2$, $x_0 = 1$

3) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$; $x_0 = 2$ 4) $f(x) = \sqrt{5x+4}$, $x_0 = 1$

Exercice2

Etudier dans chacun des cas suivants, la continuité et la dérivabilité de la fonction f en x_0 et déterminer une équation de la tangente (ou des demi-tangentes) à sa courbe (C) en le point d'bscisse x_0 .

1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$; $x_0 = 1$ 2) $f(x) = x^2 + 2\,|x-1|$; $x_0 = 1$

3) $f(x) = |x(3-x)|$; $x_0 = 3$ 4) $f(x) = \dfrac{x^2 - |x|}{x^2 + x + 1}$; $x_0 = 0$

5) $f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$; $x_0 = n$, $n \in \mathbb{Z}$

6) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{|x|}{x} \inf(|x^3|, |x|) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$; $x_0 = 0$

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants , déterminer les intervalles de IR sur lesquels la fonction f est dérivable et calculer sa fonction dérivée f

1) $f(x) = -x^3 + 2\sqrt{2}\,x^2 + 1$

2) $f(x) = x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 1$

3) $f(x) = 2x(3x - 5)$

4) $f(x) = (x-1)\left(\frac{1}{2} \cdot x^2 - 2x + 1\right)$

5) $f(x) = (x^3 + x^2)(-2x^2 + 3)$

6) $f(x) = (3x^2 - 1)^4$

7) $f(x) = (3x - 1)^3 . (x^2 - 1)^2$

8) $f(x) = (1 - x^2)^3 . (x^3 + \sqrt{x} - 1)$

9) $f(x) = \frac{8}{x^2 + 2}$

10) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$

11) $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 4}{1 - x}$

12) $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3$

13) $f(x) = \frac{(x^2 - 1)^2}{x(2 + x)^3}$

14) $f(x) = \frac{x - 1}{|x| + 1}$

15) $f(x) = \frac{|x^2 + x| + 1}{|x| + 1}$

16) $f(x) = \cos 4x - 2\cos 2x$

17) $f(x) = \cos^2 x \sin 2x$

18) $= \frac{\cos^3 x}{1 - 2\sin x}$

19) $f(x) = \frac{4\sin x - 3\cos x}{3\sin x + 4\cos x}$

20) $f(x) = \left(\frac{1 - 2\sin x}{1 + 2\sin x}\right)^2$

Exercice 4

Soient f et g les fonctions définies sur IR respectivement par :

$$f(x) = x \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{|x|}$$

Etudier la dérivabilité de f, g et (f.g) en 0

Que peut -on conclure ?

Exercice5

Calculer les limites suivantes, en utilisant la définition du nombre dérivé.

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{2x}$

3) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{x \sin x - \frac{\pi}{12}}{x - \frac{\pi}{6}}$

4) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\frac{1}{\sin^2 x} - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{2}{1+\cos x} - 1}{x}$

Exercice 6

soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \dfrac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$

où a et b sont des réels

1) Déterminer les réels a et b pour que la tangente à la courbe (C) de f au point d'abscisse 0 ait pour équation : $y = 4x + 3$

2) Préciser la position de (C) par rapport à cette tangente

Exercice7 **(N.C)**

soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Déterminer le point de (C) où la tangente est paralèlle à la droite d'équation $y = x + 4$

Déterminer une équation de cette tangente.

Exercice 8

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3x}{2x-1}$

On designe par (C) sa courbe reprentative

1) Montrer qu'il existe deux points M_1 et M_2 de (C) où les tangentes à (C) ont pour coefficient directeur -3.

Donner les coordonnées de ces points et une équation de la tangente en chacun de ces points.

2) Existe-t -il un point de (C) pour lequel le coefficient directeur de la tangente en ce point est égal à 3

Exercice 9 (N.C)

soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = ax^2 + bx + c$

On désigne par (C) sa courbe representative.

Soient A et B deux points de (C) d'abscisses respectives a et b et (T) la tangente à (C) en un point C d'abscisse α telle que (T) soit parallèle à (AB).

Que peut-on dire de l'abscisse α ?

Exercice10

Calculer la dérivée $n^{ième}$ de chacune des fonctions :

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x-1}$$

2) En déduire la dérivée $n^{ième}$ de la fonction h définie par : $h(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$

Exercice 11 (N.C)

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et (C) sa représentation graphique.

Soit $a \in IR^*+$ et (T_a) la tangente à (C) au point A d'abscisse a.

(T_a) coupe l'axe des abscisses $(O,\vec{i})$ en un point B et celui des ordonnées $(O, \vec{j})$ en un point C.

Soit D le projeté orthogonal de A sur $(O, \vec{i})$ et E celui de A sur $(O, \vec{j})$.

Montrer que les aires des triangles OBE et OCD et celle du rectangle ODAE sont égales.

Quelle est cette valeur commune ?

Exercice 12

Soient [Ou) et [Ov) deux demi-droites dirigées par les vecteurs unitaires respectifs $\vec{Ou}$ et $\vec{Ov}$ tels que $(\vec{Ou}, \vec{Ov}) = \alpha$ [2 π]

A l'instant t = 0, deux mobiles M_1 et M_2 sont en O.

A partir de cet instant, ils se déplacent respectivement sur [Ou) et sur [Ov) avec des vitesses constantes respectives V_1 et V_2.

On note $x_1(t)$ et $x_2(t)$ les abscisses respectives de M_1 et M_2 sur [Ou) et [Ov).

Déterminer $d(t) = M_1M_2$

(On pourra utiliser les relations d'El-Kashi relatives à un triangle ABC :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB.\,AC \cos(\vec{AB}, \vec{AC})$)

2) Démontrer que M_1 et M_2 s'éloignent l'un de l'autre à vitesse constante.

Calculer cette vitesse en fonction de α.

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x^2$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Soient A et B deux points de (C) d'abscisses respectives a et b non nulles.

Déterminer les équations des tangentes à (C) en A et en B.

2) On suppose que ces tangentes sont perpendiculaires et se coupent en un point M.

a) Exprimer les équations de ces tangentes en fonction de a seulement.

b) Quelle est la nature de la courbe décrite par le point M ?

Exercice 14 (N.C)

Soit f la fonction définie sur IR+ par $f(x) = x^2$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A l'instant t = 0, un mobile M part de O et se déplace sur l'axe $(O, \vec{i})$ à la vitesse constante de $1.cm.s^{-1}$.

Soit P le point de (C) de même abscisse que M.

1) On note a(t) l'aire du triangle OMP à l'instant t.

Calculer la vitesse instantanée V(t) d'évolution de l'aire a(t) à l'instant t en $cm^2.s^{-1}$.

2) Déterminer l'abscisse x_0 du point M pour laquelle on a : $V(t) = 6cm^2.s^{-1}$.

Exercice 15

1) Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur [0, 1] par :

$$f(x) = 2x^2 - x - 1 \quad \text{et} \quad g(x) = x^3 - x - 1$$

a) Vérifier que f(0) = g(0) et que pour tout $x \in [0, 1]$

On a $g'(x) \leq f'(x)$

b) Vérifier que pour tout $x \in [0, 1]$ on a $g(x) \leq f(x)$

2) Soient maintenant deux fonctions F et G définies et dérivables sur [a, b] et telles que :

F(a) = G(a) et pour tout $x \in [a, b]$ on a $F'(x) \geq G'(x)$

Montrer que pour tout $x \in [a, b]$ on a $F(x) \geq G(x)$

Que se passe-t-il si $F(a) \neq G(a)$?

Exercice 16

Soit f l'application de IR dans IR telle que :

(1) $\begin{cases} \text{Pour tout } (x, y) \in IR^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y) \\ f \text{ est dérivable en } 0. \end{cases}$

1) Calculer f(0)

2) Montrer que f est dérivable sur IR

Calculer le nombre dérivé $f'(x_0)$ pour tout $x_0 \in IR$ (On posera $x = x_0 + h$ et $y = x_0$)

3) Peut-on alors déterminer les fonction f vérifiant le système (1).

Exercice 17 (N.C)

Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

1) Quelles que soient les fonctions f et g définies sur l'intervalle I.

Si f et g sont croissantes sur I alors (f + g) est croissante sur I.

2) quelles que soient les fonctions f et g définies sur l'intervalle I.

Si f et g sont croissantes sur I alors (f.g) est croissante sur I.

3) f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Si f et g sont croissantes sur I alors (f.g) est croissante sur I.

4) f est une fonction strictement décroissante sur un intervalle I, alors $\frac{1}{f}$ est strictement croissante sur I.

5) f est une fonction définie sur [a , c], dérivable sur] a, b [U] b, c [$(a < b < c)$

et $f'(x) = 0$ sur] a, b [U] b, c [,

Alors f est une fonction constante sur [a, c].

Exercice 18 (N.C)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - mx}{x^2 - 4x + 3}$ où $m \in IR$

Déterminer les réels m pour lesquels f_m :

a) n'admet pas d'extrémums

b) admet un maximum et un minimum

c) admet uniquement un minimum.

Exercice 19

Discuter suivant les valeurs de m, le nombre d'extremums de la fonction f_m définie par

$$f_m(x) = \frac{2x^2 + mx}{x^2 - 1} \quad , m \in IR$$

Exercice 20

Dans chacun des cas suivants, étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle I indiqué.

1) $f(x) = 3\cos^4 x + \sin^4 x - 1$; $I = [0, \frac{\pi}{2}]$

2) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\cos 2x}$; $I = [-\pi, \pi]$

3) $f(x) = \frac{3 \sin x}{2 \sin x - 1}$; $I = [-\pi, \pi]$

4) $f(x) = \left(\frac{1 - 2 \sin x}{2 \sin x + 1} \right)^2$; $I = [-\pi, \pi]$

5) $\begin{cases} f(x) = \frac{tg^2 x}{1 - \cos x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$ $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Exercice 21

Soit f la fonction définie sur [0, 2] par :

$f(x) = E(x) \sin(\pi.x)$

1) Simplifier f(x)

2) Montrer que f est continue sur [0, 2]

3) Etudier la dérivabilité de f en 1

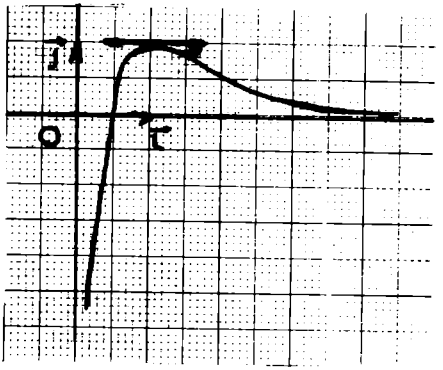
Préciser les intervalles sur lesquels f est dérivable.

Déterminer f ' (x).

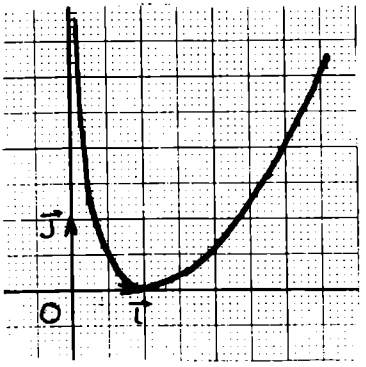
4) Etudier les variations de f.

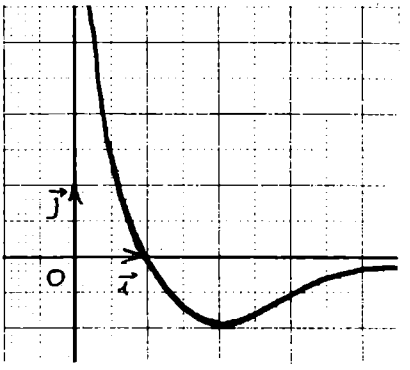
Exercice 22

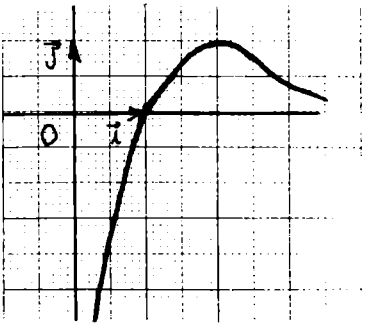
On considère la fonction f dont la représentation graphique (C) dans un repère orthonormé est donnée ci-dessous.



Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, quelle est la seule qui soit susceptible de représenter la fonction dérivée f ' de f ?







Corrigés

Exercice 2

$$2)\ f(x) = x^2 + 2\,|\,x-1\,| = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \le 1 \\ x^2 + 2x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = 0$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = 4$$

Alors f n'est pas dérivable en 1, mais elle l'est à gauche en 1 et $f'_g(1) = 0$ et elle l'est aussi à droite en 1et $f'_d(1) = 4$

La courbe (C) admet un point anguleux en $M_0(1,1)$.

L'équation de la demi- tangente à gauche en M_0 est : $y = 1$ et $x \le 1$

L'équation de la demi- tangente à droite en M_0 est : $y = 4x - 3$ et $x \ge 1$

5) $f(x) = E(x) + [\,x - E(x)\,]^2$

On vérifie d' abord la continuité de f sur IR.

En effet, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a f est continue (et dérivable aussi) sur] n, n+1 [

* Si $x \in]\,n, n+1\,[$ on a $f(x) = n + (x-n)^2$

* Si $x \in]\,n-1, n\,[$ on a $f(x) = n-1+(x-n+1)^2$

$$\lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{x \to n^-} n-1 + (x - n + 1)^2 = n = f(n)$$

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n^+} n + (x - n)^2 = n = f(n)$$

Alors f est continue en n, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et par suite f est continue sur IR.

Etudions la dérivabilité de f en n, $n \in \mathbb{Z}$.

$$\lim_{x \to n^-} \frac{f(x) - f(n)}{x - n} = \lim_{x \to n^-} \frac{(x - n + 1)^2 - 1}{x - n} = \lim_{x \to n^-} \frac{(x - n)(x - n + 2)}{x - n} = 2$$

$$\lim_{x \to n^+} \frac{f(x) - f(n)}{x - n} = \lim_{x \to n^+} \frac{(x - n)^2}{x - n} = 0$$

Alors f est dérivable à gauche en n et $f'_g(n) = 2$ et f est dérivable à droite en n

et $f'_d(n) = 0$ donc f n'est pas dérivable en n.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{Z}$, f n'est pas dérivable en n.

Les équation des demi-tangentes au points de (C) d' abscisse n sont :

$$\begin{cases} y = 2x - n \\ x \leq n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y = n \\ x \geq n \end{cases}$$

6) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{|x|}{x} \inf(|x^3|, |x|) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On démontre que f est continue en 0, étudions alors la dérivabilité.

On remarque que :

* si $x \in [-1,1]$ alors $\inf(|x^3|, |x|) = |x^3|$

* si $|x| > 1$ alors $\inf(|x^3|, |x|) = |x|$

Si on suppose que $|x| < 1$ on aura :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{|x|^4}{x} & \text{si } 0 < |x| < 1 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{|x|^4}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|^4}{x^2} = 0$$

Alors f est dérivable en 0 et f'(0) = 0.

La courbe (C) de f admet une tangente horizontale au point O.

Exercice 3

7) $f(x) = (3x-1)^3 (x^2 - 1)^2$

f est dérivable sur IR et on a $f'(x) = (3x-1)^2 (x^2 - 1)\ (21 x^2 - 4x - 9)$

11) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 4}{1 - x}$

f est dérivable sur IR \{1} et on a : $f'(x) = \dfrac{-2x^2 + 4x - 1}{(1 - x)^2}$

13) $f(x) = \dfrac{(x^2 - 1)^2}{x (2 + x)^3}$

f est définie et dérivable sur IR* \ {-2} et on a $f'(x) = \dfrac{2(3x^2 + 2x + 1)(x^2 - 1)}{x^2 (2 + x)^4}$

15) $f(x) = \dfrac{|x^2 + x| + 1}{|x| + 1} = \dfrac{|x||x + 1| + 1}{|x| + 1}$

f est définie continue sur IR et elle est dérivable sur IR* \{-1}.

Etudions la dérivabilité de f en 0 et en (-1)

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\dfrac{-x(x+1)+1}{-x+1} - 1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x^2}{x(1-x)} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{x(x+1)+1}{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{x(1+x)} = 0$$

Alors f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{\dfrac{x(x+1)+1}{-x+1} - \dfrac{1}{2}}{x + 1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{x + \dfrac{1}{2}}{1 - x} = \frac{-1}{4}$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1^+} \frac{\frac{-x(x+1)+1}{-x+1} - \frac{1}{2}}{x+1} = \lim_{x \to -1^+} \frac{x - \frac{1}{2}}{x-1} = \frac{3}{4}$$

Alors f n' est pas dérivable en (-1).

Ainsi f est dérivable sur IR \ {-1} et on a :

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 2}{(1-x)^2} & \text{si} \quad x < -1 \\ f'(x) = \dfrac{x(x-2)}{(1-x)^2} & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ f'(x) = \dfrac{x(x+2)}{(1+x)^2} & \text{si} \quad x > 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

16) $f(x) = \cos 4x - 2\cos 2x$

f est définie et dérivable sur IR et on a : $f'(x) = -4\sin 4x + 4\sin 2x$

18) $f(x) = \dfrac{\cos^3 x}{1 - 2\sin x}$

f est définie et dérivable sur $IR \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + k\,2\pi,\ \frac{5}{6}\pi + k\,2\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ et on a

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x(4\sin^2 x - 3\sin x + 2)}{(1 - 2\sin x)^2}$$

Exercice 4

$f(x) = x$ et $g(x) = \sqrt{|x|}$

f est définie et dérivable sur IR

g est définie sur IR et dérivable sur IR*.

Alors (f.g) est dérivable sur IR*

Etudions la dérivabilité de (f.g) en 0.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(fg)(x) - (fg)(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x\to 0} \sqrt{|x|} = 0.$$

Alors (f.g) est dérivable en 0 et on a $(f.g)'(0) = 0$

La conclusion qu'on peut tirer est double, d'une part la réciproque de la proprieté de la dérivabilité du produit de fonctions est fausse , puisqu' on a (f.g) est dérivable en 0 et pourtant g ne l'est pas.

D'autre part, les fonctions exprimées à l' aide des radicaux, peuvent être dérivables aux points qui annulent les radicaux.

Exercice 5

2) Soit $f(x) = \cos x$ et $f'(x) = -\sin x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{2} f'(0) = 0$$

4) Soit $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ et $f'(x) = \frac{-2\cos x}{\sin^3 x}$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\sin^2 x} - 1}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} = f'(\frac{\pi}{2}) = 0$$

Exercice 6

1) $f(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$

f est définie et dérivable sur IR et pour tout $x \in IR$, on a $f'(x) = \frac{-ax^2 - (2b-6)x + a}{(x^2+1)^2}$

L'équation de la tangente à (C) en le point d'abscisse 0 est $y = 4x + 3$, si et seulement si

$$\begin{cases} f'(0) = 4 \\ f'(0) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$2)\ f(x) - 4x - 3 = \frac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1} - 4x - 3 = \frac{-4x^3}{x^2 + 1}$$

Ainsi si $x \geq 0$; la courbe (C) est située au dessous de la tangente et si $x \leq 0$,

la courbe (C) est située au dessus de la tangente.

D'une autre manière, on traitera cette équation en utilisant la dérivée seconde de f.

f étant deux fois dérivable sur IR et on a :

$$f''(x) = \frac{-8x(3 - x^2)}{(1 + x^2)^3}$$

Exercice 8

$$1)\ f(x) = \frac{3x}{2x - 1}$$

f est dérivable sur $IR \setminus \{\frac{1}{2}\}$ et on a pour tout $x \in IR \setminus \{\frac{1}{2}\}$, $f'(x) = \frac{-3}{(2x - 1)^2}$

Pour qu'il existe deux points M_1 et M_2 de (C) d'abscisses respectives x_1 et x_2 tels que les tangentes en ces points aient un coefficient directeur égal à (-3) il faut et ilsuffit que :

$$f'(x_1) = f'(x_2) = -3$$

Or $f'(x) = -3 \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=0$.

Ainsi il existe deux points distincts M_1 et M_2 , M_1 (1,3) et M_2 (0,0) vérifiant la question.

Soient (T_1) et (T_2) les tangentes à (C) respctivement en M_1 et M_2

$$(T_1) : y = -3x + 6 \quad \text{et} \quad (T_2) : y = -3x$$

2) Soit $x_0 \in IR \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

La tangente à (C) au point d'abscisse x_0 a pour coefficient directeur 3 si et seulement si

$f'(x_0) = 3$

$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow \dfrac{-3}{(2x0 - 1)^2} = 3$ ce qui et impossible.

Alors il n'existe aucun point de (C) où la tangente a pour coefficient directeur égal à 3.

Exercice 10

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x-1}$$

f et g sont indéfiniment dérivables respectivement sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$f'(x) = \frac{-1 \cdot .}{(x+1)^2} \quad \text{et} \quad g'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \quad \text{et} \quad g''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{-2 \cdot 3}{(x+1)^4} \quad \text{et} \quad g'''(x) = \frac{-2 \cdot 3}{(x-1)^4}$$

Par recurrence , on démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}$;

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} \quad \text{et} \quad g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$$

En effet, le resultatt est vrai pour n = 0.

On suppose qu'il demeure vrai pour n = k, on a alors :

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(x+1)^{k+1}} \quad \text{et} \quad g^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(x-1)^{k+1}}$$

$$f^{(k+1)}(x) = (-1)^k k! \left(\frac{1}{(x+1)^{k+1}}\right)' = (-1)^k k! \left(\frac{-(k+1)(x+1)^k}{(x+1)^{2(k+1)}}\right)$$

$$= (-1)^k k! \left(\frac{-(k+1)}{(x+1)^{k+2}}\right) = \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{(x+1)^{k+2}}$$

De même :

$$g^{(k+1)}(x) = (-1)^k k ! \left(\frac{1}{(x-1)^{k+1}} \right)' = \frac{(-1)^{k+1} (k+1) !}{(x-1)^{k+2}}$$

Alors pour tout $n \in IN$ on a :

Pour tout $x \in IR \setminus \{-1\}$ $\quad f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n \, n !}{(x+1)^{n+1}}$

Pour tout $x \in IR \setminus \{-1\}$ $\quad g^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n \, n !}{(x-1)^{n+1}}$

2) $h(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1} = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1} = f(x) + g(x)$

Alors h est indéfiniment dérivable sur $IR \setminus \{1,-1\}$.

Pour tout $n \in IN$ et pour tout $x \in IR \setminus \{1,-1\}$ on a :

$$h^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \, n !}{(x+1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n \, n !}{(x-1)^{n+1}}$$

Exercice 12

1) Les relations d' El-Kashi dans le triangle OM_1M_2 s'écrivent :

$(M_1M_2)^2 = (OM_1)^2 + (OM_2)^2 - 2OM_1 . OM_1 . \cos(OM_1, OM_2)$

c'est à dire $(M_1M_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 \cos\alpha$

Soit $d(t) = M_1M_2 = \sqrt{t^2 V_1^2 + t^2 V_2^2 - 2t^2 V_1 V_2 \cos\alpha}$

Ainsi $d(t) = t \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2 V_1 V_2 \cos\alpha}$

2)Les vecteurs vitesse $\overrightarrow{V_1}(t) = V_1 . \vec{u}$ et $\overrightarrow{V_2}(t) = V_2 . \vec{v}$

d'où $d(t) = t \sqrt{(\overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2})^2} = || \overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2} || \, t$

Ainsi $d(t) = \mathcal{V} . t$ où $\mathcal{V} = || \overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2} ||$

Les points M_1 et M_2 s'éloignent à la vitesse constante $\mathcal{V} = || \overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2} ||$

$(\mathcal{V}^2 = V_1^2 + V_2^2 - 2V_1 V_2 \cos\alpha)$

Exercice 13

1) On désigne par (T_A) et (T_B) les tangentes à (C) respectivement en A et en B.

(T_A) : $y = 2ax - a^2$ $\quad$ (T_B) : $y = 2bx - b^2$.

2) a) Les tangentes (T_A) et (T_B) sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs et -1.

C'est àdire $4ab = -1 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{4a}$

Ainsi (T_A) : $y = 2ax - a^2$ et (T_B) : $y = \frac{-1}{2a}x - \frac{1}{16a^2}$

b) Soit M (x ,y) un point du plan.

(T_A) et (T_B) se coupent en M si et seulement si $\begin{cases} 2ax - a^2 = \frac{-1}{2a}x - \frac{1}{16a^2} \\ y = 2ax - a^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4a^2 - 1}{8a} \\ y = 2ax - a^2 \end{cases}$ d'où $M\left(\frac{4a^2 - 1}{8a}, \frac{-1}{4}\right)$

L'ordonnée de M etant fixe, alors le point M décrit la droite Δ dont une équation est

$$y = -\frac{1}{4}$$

Exercice 15

1) a) $f(0) = -1$ et $g(0) = -1$

f et g sont dérivables sur [0,1] et ona $f'(x) = 4x - 1$ et $g'(x) = 3x^2 - 1$.

Pour tout $x \in [0,1]$ on a $f'(x) - g'(x) = -3x^2 + 4x = x(-3x + 4) \geq 0$

Alors pour tout $x \in [0,1]$, $f'(x) \geq g'(x)$

b) $f(x) - g(x) = -x^3 + 2x^2 = x^2(-x + 2)$

Ainsi pour tout $x \in [0,1]$ on a $f(x) \geq g(x)$.

2) Soit H la fonction définie sur [a,b] par :

Pour tout $x \in [a , b]$, $H(x) = F(x) - G(x)$.

H est dérivable sur [a, b] et on a pour tout $x \in [a,b]$, $H'(x) = F'(x) - G'(x)$.

Alors pour tout $x \in [a , b]$, on a $H'(x) \geq 0$.

En déduit que H est croissante sur [a , b].

Comme de plus $H(a) = F(a) - G(a) = 0$, on aura pour tout $x \in [a , b]$ on a $H(x) \geq H(a)$.

C'est à dire pour tout $x \in [a , b]$; $H(x) \geq 0$, donc pour tout $x \in [a , b]$, $F(x) - G(x) \geq 0$.

Si on suppose que $F(a) \neq G(a)$, alors $H(a) \neq 0$ (en particulier si $H(a) < 0$).

La fonction H demeure croissante sur [a ,b] et pour tout $x \in [a,b]$, $H(x) \geq H(a)$.

Donc si $H(a) < 0$, on ne peut pas affirmer que pour tout $x \in [a,b]$. $F(x) - G(x) \geq 0$.

Exercice 16

1) $f(0 + 0) = f(0) + f(0)$ c'est à dire $f(0) = 2f(0)$. D'où $f(0) = 0$

2) Soit $x_0 \in IR$, on a $f(x_0 + h) = f(x_0) + f(h)$

Alors $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0) + f(h) - f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h)}{h} = f'(0)$

Ainsi f est dérivable en x_0 car elle l'est en 0, et pour tout $x_0 \in IR$ on a $f'(x_0) = f'(0)$

3) f étant dérivable sur IR et f' est la fonction constante sur IR (IR est un intervalle) alors

il existe $a \in IR$ tel que $f'(x) = a$ pour tout $x \in IR$

Alors pour tout $x \in IR$, on a $f(x) = ax + b$.

Or $f(0) = 0$ donc $b = 0$

Ainsi les fonctions f vérifiant le systeme (1) sont toutes du type linéaires :

Pour tout $x \in IR$, $f(x) = ax$ où $a \in IR$

Réciprquement , toute application linéaire vérifie le système (1).

Exercice 19

$f_m(x) = \dfrac{2x^2 + mx}{x^2 - 1}$; $m \in \mathbb{R}$

f_m est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1,-1\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1,-1\}$ on a $f'_m(x) = -\dfrac{mx^2 + 4x + m}{(x^2 - 1)^2}$

Pour que f_m admette des extrémums, il faut et il suffit que f_m s'annule en changeant de signe.

On pose $g_m(x) = mx^2 + 4x + m$

* si $m = 0$, $g_0(x) = 4x$

Alors f_0 s'annule et change de signe en 0.

* si $m \neq 0$; $mx^2 + 4x + m = 0$

$\Delta' = 4 - m^2$

$\Delta' > 0$ et $m \neq 0 \Leftrightarrow$ $m \in]-2, 0[\cup]0, 2[$

$g_m(x)$ est un trinôme de second degré

Si $\Delta' > 0$ alors $g_m(x)$ s'annule et change de signe en deux valeurs distinctes.

Vérifions que ces valeurs ne peuvent être 1ou (-1)

En effet , si les racines de $g_m(x) = 0$ sont 1 ou (-1) , alors on aura :

$$\begin{cases} m + 4 + m = 0 \\ \text{ou} \\ m - 4 + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ \text{ou} \\ m = 2 \end{cases}$$

Ce qui est impossible car $m \in]-2, 0[\cup]0, 2[$.

Ainsi :

* $m = 0$ alors f_m admet un extrémum unique à l'origine.

* $m \in]-2, 0[\cup]0, 2[$ alors f_m admet deux extrémums

* $m \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$ alors f_m n'admet pas d'extrémums.

Exercice 20

4) $f(x) = \left(\frac{1 - 2\sin x}{1 - 2\sin x}\right)^2$

f est définie et dérivable sur $[-\pi, -\frac{5}{6}\pi[\cup]-\frac{5}{6}\pi, -\frac{\pi}{6}[\cup]-\frac{\pi}{6}, \pi]$

et on a $f'(x) = \frac{-8\cos x(1 - 2\sin x)}{(1 + 2\sin x)^3}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \quad \text{ou} \quad \sin x = \frac{1}{2} \\ x \in [-\pi, \pi] \setminus \{-\frac{5}{6}\pi, -\frac{\pi}{6}\} \end{cases}$$

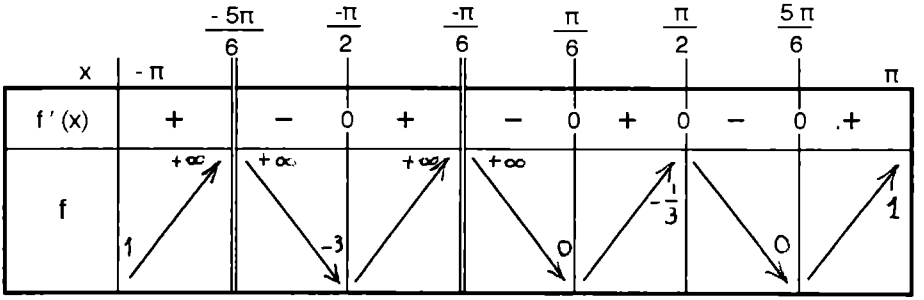
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{2} \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{6} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ x \in [-\pi, \pi] \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\begin{cases} 1 - 2\sin x \leq 0 \\ x \in [-\pi, \pi] \end{cases} \Leftrightarrow x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi]$$

$$\begin{cases} 1 + 2\sin x \leq 0 \\ x \in [-\pi, \pi] \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}]$$

D'où le tableau de variation de f :



Exercice 21

1) $f(x) = E(x) \sin(\pi x)$

si $x \in [0,1[$ alors $f(x) = 0$

si $x \in [1,2[$ alors $f(x) = \sin \pi x$

si $x = 2$ alors $f(2) = 0$

2) f est continue sur $[0,1[\cup]1,2[$

Etudions la continuité de f en 1 et à gauche en 2

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \sin \pi x = 0 = f(1)$$

Alors f est continue en 1.

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \sin(\pi x) = 0 = f(2)$$

Alors f est continue à gauche en 2

Ainsi f est continue sur [0,2]

3) $$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sin \pi x}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{-\sin(\pi x - \pi)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} -\frac{\sin \pi (x - 1)}{x - 1} = \lim_{h \to 0} \frac{-\sin \pi h}{h} = -\pi$$

Alors f est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = -\pi$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{0}{x - 1} = 0$$

f est dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = 0$, mais f n'est pas dérivable en 1.

f est dérivable sur] 0,1 [∪] 1,2 [et on a :

$$\begin{cases} f'(x) = 0 & \text{si } x \in]0,1[\\ f'(x) = \pi \cos \pi x & \text{si } x \in]1,2[\end{cases}$$

4) $$\begin{cases} \cos \pi x \geq 0 \\ 1 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + k2\pi \leq \pi x \leq \frac{\pi}{2} + k2\pi \ ; k \in Z \\ 1 < x < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} + 2k \leq x \leq \frac{1}{2} + 2k \ ; k \in Z \\ 1 < x < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq x < 2$$

D'où le tableaux de variations de f :

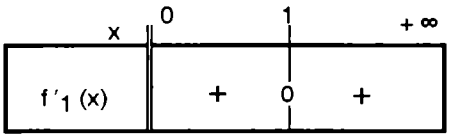
x	0		1		$\frac{3}{2}$		2
f ' (x)	0		‖	−	0	+	
f		0 ↘	‖	0 ↘		↗	0
	0		‖		-1		

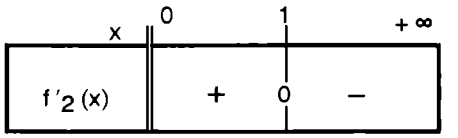
Exercice 22

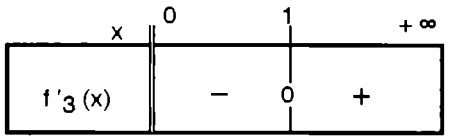
De la représentaion graphique de f , on tire son tableau de variation :

x	0		1		$+\infty$
f ' (x)	+		0	−	
f	$-\infty$	↗	1	↘	0

Les tableaux de signes de chacune des fonctions présumées dérivées de f sont :







Une simple comparaison du tableau de variations de f aux tableaux de signes de f ', nous conduit à choisir f'_3 pour fonction dérivée de f .

FONCTIONS POLYNOMES DU TYPE

$ax^2 + bx + c$ * $ax^3 + bx^2 + cx + d$ * $ax^4 + bx^2 + c$

Exercices

Exercice 1

soit la fonction f : $x \longmapsto \frac{1}{2} x^2 - 2x + 3$

1) Dresser le tableau de variation de f ;

En déduire l'ensemble $I = \{ f(x), x \in IR \}$

2) soit y_0 un élément de I, déterminer en fonction de y_0 les antécédents de y_0.

Exercice 2

soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2} x^2 - x$

1) Etudier f et représenter C_f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2) On appelle g la fonction définie par $g(x) = \frac{x}{x - 1}$

a) Soit O' (1,1); déterminer une équation de C_g dans le nouveau repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$

b) Tracer C_g.

3) a) Déterminer les points d'intersection de C_f et C_g

b) On désigne par A leur point d'intersection d'abscisse non nulle et par A' le projeté orthogonal de A sur l'axe des abscisses. Calculer $\sin \widehat{AOA'}$ et $\operatorname{tg} \widehat{AOA'}$

4) Résoudre graphiquement dans IR x IR, l'inéquation $(y - \frac{1}{2} x^2 + x)(x - y + 1) > 0$

Exercice 3

Soit la fonction g : $x \mapsto -\frac{1}{2} x^2 + 3x - 1$

1) Etudier g et tracer C_g dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2) Soit h la fonction : $x \mapsto ax^2 + bx + c$

Sachant que C_h est l'image de C_g par la symetrie orthogonale d'axe D : x = 2 ,

construire C_h. Déterminer alors a,b, et c .

3)Soit u la fonction : $x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

Sachant que C_u est l'image de C_g par l'homothétie de centre O et de rapport 2 ,

construire C_u. Déterminer alors α , β et γ .

Exercice 4

On considère la fonction f : $x \mapsto x^2 + 2ax + b$

1) Déterminer a et b sachant que C_f coupe l'axe des ordonnées au point A d'ordonnée1 st qu'elle est tangente à la droite D : y= 2x-3 .

2) on désigne par h et k les deux fonctions associées.

Etudier leurs variations .

3) a) Préciser l'intersection de leurs courbes représentatives Γ et Γ'

b) Déterminer l'intersection de Γ et de Γ' avec l'axe des abscisses et avec la droite D.

c) Tracer Γ et Γ' dans le plan muni d'un même repère .

Exercice 5

On considére la fonction f : $x \mapsto ax^2 + bx$

1) Déterminer a et b sachant que la courbe representative Γ de f dans le plan muni d'un repère orthonormé, passe par le point A (-1,0) et sa tangente en ce point est parallèle à la droite D : y = 2x+3

2) Etudier f et tracer Γ en précisant l'intersection de Γ avec l'axe des abscisses.

3) a) tracer la courbe Γ' représentative de la fonction g : $x \mapsto f(x) + 1$

b) Déduire les variations de g .

Exercice 6

On considère la f : $x \mapsto ax^3 + bx + 2$ $(a \neq 0)$

1)Quelle condition doit vérifier a et b pour que f admette deux extremums.

2) Dresser alors le tableau de variation de f

3) Dans cette question on suppose que a=-1 et b =3

a) Déterminer le tableau de variation de f

b) Tracer sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

c) En déduire le nombre de solutions de l'équation $-x^3 + 3x = m$ quand m varie

4) Soit g la fonction $x \mapsto x^2 - x + 2$

a) On appelle Γ' sa courbe représentative. Déterminer $\Gamma \cap \Gamma'$

b) Resoudre graphiquement l'inéquation

$$\frac{-x^3 + 3x + 2}{x^2 - x + 2} \geq 0$$

Exercice 7

On considère la fonction f $x \mapsto ax^2 + bx + c$

1) Déterminer les réels a, b et c sachant que les images respectives de 2, -3 et 3 sont 18, -12 et 42

2) a) Etudier les variations de f

b) Soit C la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

Tracer C

3) Discuter suivant les valeurs du paramètre non nul m, le nombre de solutions de l'équation (E) $3x^2 + 9x - 12 - \frac{1}{m} = 0$

4) A quelle condition sur m, la droite D_m $y = mx - 15$ coupe-t-elle C en un point ? Préciser alors pour chaque valeur de m leur point d'intersection.

5) L'axe des abscisses est coupé par C par deux points A et B.

En désignant par S le sommet de la parabole C, montrer que le triangle SAB est isocèle;

Exercice 8

Soit la fonction $f_m : x \mapsto (m-2)x^2 + mx - 2m + 8$ et on désigne par C_m sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1) Discuter suivant m la nature de C_m

Dans la suite on suppose que $m \neq 2$

2) En écrivant $f_m(x)$ sous la forme am + b, montrer que C_m passe par deux points fixes A et B.

3) a) Déterminer m pour que le point C(-1, 4) appartienne à C_m

b) Etant donné un point M_0 (x_0, y_0), à quelle condition sur M_0, il existe une courbe C_m passant par M_0.

Exercice 9

On concidère la fonction $f_m : x \mapsto (m + 1) x^2 - (3m + 1) x + 2 (m - 1)$ où $m \in \mathbb{R}$

On désigne par $\mathcal{P}_m$ la représantation graphique de f_m dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Discuter en fonction de m , la nature de $\mathcal{P}_m$

2) Montrer que toutes les courbes $\mathcal{P}_m$ passent par deux points fixes A et B , dont l'un est situé sur l'axe des abscisses. (on le notera A)

3) a) Détermner les valeurs a et b du réel m telles que $\mathcal{P}_a$ admette A pour sommet et $\mathcal{P}_b$ admette le point B pour sommet.

b) Etudier f_a et f_b et déterminer $\mathcal{P}_a \cap \mathcal{P}_b$

c) Construire $\mathcal{P}_a$ et $\mathcal{P}_b$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

d) Soit D le milieu de [AB]. Montrer que $\mathcal{P}_a$ et $\mathcal{P}_b$ sont symétriques par rapport à D.

4) Déterminer la valeur c du réel m telle que les tangentes en A aux paraboles $\mathcal{P}_b$ et $\mathcal{P}_c$ soient perpendiculaires .

Exercice 10

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 4$ et on désigne par Γ sa courbe repésentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a) Soit un réel a, exprimer f(x) - f(a) en fonction de (x - a)

b) Calculer f(-1) et en déduire que pour tout réel x il existe deux réels a et b tels que

$f(x) = (x + 1)(x^2 + ax + b)$

c) Déduire alors les solutions de l'équation f(x) = 0 puis de l'inéquation f(x) < 0

2) Montrer que Γ admet un point d'inflexion A.

b) Déterminer l'équation de la tangente D à Γ au point A

c) Tracer Γ et D.

3) On appelle g le fonction définie par g(x) = | f(x) |

a) Sur quel ensemble, g est-elle continue ? Dérivable ?

b) Tracer sa courbe représentative.

4) Soit h la fonction définie par h(x) = f (| x |)

Tracer sa courbe représentative.

Exercice 11

1) Etudier la fonction $f : x \mapsto -x^3 + 3x + 2$

2) Construire dans le plan muni d'un repère orthonormé la courbe Γ représentant la fonction f en indiquant une équation de la tangente à Γ au point I d'abscisse nulle.

3) La tangente à Γ au point M_0 d'abscisse x_0 recoupe Γ en un point M_1 (M_1 pouvant être égal à M_0).

a) Montrer que l'abscisse x de M_1 vérifie l'égalité :

(E) : $-x^3 + 3x_0^2 x - 2x_0^3 = 0$

b) Montrer qu'il existe 3 réels a, b et c que l'on déterminera tels que :

$-x^3 + 3x_0^2 x - 2x_0^3 = (x - x_0)(ax^2 + bx + c)$

c) Déduire que si $M_0 \neq I$, M_1 a pour abscisse $-2x_0$

4) a) Résoudre dans IR, l'équation $f(x) = 2$

b) Soient A, B et C les points de Γ dont les abscisses sont solutions de l'équation $f(x) = 2$

Les tangentes à Γ en ces points recoupent Γ aux points A_1, B_1 et C_1

Montrer que les points A_1, B_1 et C_1 sont alignés.

Exercice 12

Soit la fonction $f_m : x \mapsto \frac{1}{6} x^3 + (m-1)x^2 + 2$ et on désigne C_m sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) On suppose que m = 0

a) Etudier les variations de f_0 et montrer que C_0 est symétrique par rapport à un point A que l'on précisera.

b) Soit Δ la tangente à C_0 au point A. Etudier les positions relatives de C_0 et Δ, les tracer.

c) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f_0(x) = \alpha$ quand α varie

2) Etude du cas général

a) Montrer que C_m passe par un point fixe que l'on déterminera .

b) Soient deux réels m et n distincts , montrer que C_m et C_n se coupent en un point unique que l'on précisera .

c) Etudier les variations de f_m.

d) Montrer que pour tout réel m, C_m admet un point d'inflexion I_m.

e) Quel est l'ensemble des points I_m quand m varie ? Le représenter dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 13

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4x + 1$

1) a) Montrer que f n'admet pas d'extremum;

b) Déterminer les variations de f .

2) Soit $\mathcal{C}$ la courbe repésentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$;

a) Montrer que le point I (1 ,-1) est un point d'inflexion de $\mathcal{C}$.

b) Montrer que dans le repère $(I, \vec{i}, \vec{j})$, $\mathcal{C}$ à pour équation : $Y = -X^3 - X$

c) Que peut-on en déduire ?

3) a) Déterminer une équation de la tangente Δ à $\mathcal{C}$ au point I .

b) Montrer que $\mathcal{C}$ admet deux tangentes de coefficient directeur (-4). Trouver les équations de ces tangentes et les coordonnées des points de contact.

4) Tracer $\mathcal{C}$ et Δ

5) a) En utilisant $\mathcal{C}$, montrer que l'équation de f(x) = 0, admet une solution unique x_0.

b) Calculer f(0,1); f(0,2); f(0,3); f(0,4) ,et trouver un encadrement de x_0 à 0,1 près .

Exercice 14

On considére la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{3} x^3 - x + 1$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Déterminer les variations de f

b) Déterminer une équation de la tangente Δ à C_f au point I d'abscisse nulle et déduire la position de C_f par rapport à Δ.

2) Montrer que C_f admet I comme centre de symétrie.

3) On appelle g la fonction définie par $g(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminer a, b et c pour que la courbe C_g de g ait pour sommet le point d'ordonnée le maximum relatif de f et passe par le point d'ordonnée le minimum relatif de f

4) Représenter C_f et C_g relativement à un même repère .

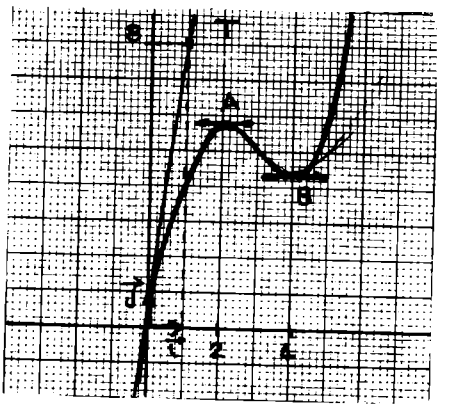
5) On appelle D_m la droite dont une équation est : $y = m\,x$

a) Montrer que D_m coupe C_g en deux points A et B distincts (on ne calculera pas leurs coordonnées).

b) Soit M (x , y) le milieu du segment [AB]. Déterminer l'ensemble des points M quand m varie.

Exercice 15

on donne la représention graphique C d'une fonction f



T (1, 8)
A (2, $\frac{20}{3}$)
B (4, $\frac{16}{3}$)

On admet que f est dérivable et que sa fonction dérivée f ' est définie par :

$f'(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels.

1) En utilisant la courbe de f montrer que :

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 0 \\ 16a + 4b + c = 0 \\ c = 8 \end{cases}$$

En déduire f '

2) On considère la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x$

Montrer que (g - f) est une fonction constante. Conclure en déterminant f .

Exercice 16

Soit la fonction f définie par $f(x) := \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} x^2 - 2$

1) Etudier la parité de f et dresser son tableau de variation sur IR+ .

2) On désigne par C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Montrer que C coupe l'axe des abscisses en deux point distincts que l'on déterminera

3) a) Tracer C et déterminer le nombre de solutions dans IR de l'équation :

$\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} x^2 - 2 = m + 5$; quand m varie .

b)Tracer C' représentant dans le plan la fonction $g : x \rightarrow -\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^2 + 2$.

Exercice 17

Une entreprise fabrique une certaine quantité q d'objets. Les coûts de productin en dinars sont donnés par la fonction suivante : $C(q) = 0{,}008\, q^3 - 6{,}48\, q^2 + 2000q$

1) Compléter le tableau

q	50	100	200	300	400	500	600	700
C (q)								

2) Etudier les variations de C sur [0 , + ∞ [.

3) Chaque unité est vendue à 1187,8 dinars, la recette totale en dinars est donnée par la fonction suivante :

$$R(q) = 1187{,}8\, q$$

a) Représenter C et R dans un repère orthogonal (sur l'axe des abscisses 1 cm représentera 50 objets et sur l'axe des ordonnées 1 cm représentera 100.000 dinars)

b) Déterminer graphiquement l'intervalle dans lequel doit se situer la production q pour qu'il y ait rentabilité de l'entreprise .

c)Trouver graphiquement la quantité q_m à produire (et à vendre) pour que le bénéfice soit maximum.

Exercice 18

Une entreprise fabrique une quantité x d'un certain produit. On suppose que x est un réel compris entre 0 et 20 et que le coût de production en milliers de dinars est donné par $f(x) = 0,1\ x^3 - 3\ x^2 + 30\ x$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal , (1cm représentera 2 objets sur l'axe des abscisses et 1 cm représentera 20.000 dinars sur l'axe des ordonnées).

A : Etude du coût de production

1) a) Etudier les variations de f sur I = [0, 20].

b) Compéter le tableau suivant :

x	2	5	8	10	15	18	20
f (x)	48,8				112,5		200

2) Montrer que (C) admet un point d'inflexion I que l'on déterminera .

b) Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) au point I

c) Tracer (C) et (T)

B : Etude du bénéfice en fonction de la production

On supose que toute la production a été vendue à un prix de 8400 dinars par unité.

La recette totale exprimée en milliers de dinars est définie sur I par $g(x) = 8,4.\ x$.

Le bénéfice total sera alors donné par $h(x) = g(x) - f(x)$.

1) a) Etudier les variations de la fonction h sur I

b) Déduire le bénéfice maximum que l'on peut réaliser.

2) a) Résoudre l'équation $h(x) = 0$ sur I et déduire le signe de h(x) sur I.

b) Interpréter ce résultat en termes de bénéfice.

Exercice 19 (N.C)

Un objet est lâché depuis une hauteur de 36 mètres. La distance parcourue par cet objet au bout de t secondes est $4t^2$ (en mètres).

Calculer la durée de la chute et la vitesse au moment où cet objet atteint le sol .

Exercice 20 (N.C)

Un jardiner doit construire un parterre de fleurs ayant la forme d'un secteur circulaire .

Il dispose de 100 mètres de fil de fer pour l'entourer .

Quel rayon doit- il donner à ce secteur circulaire pour que la surface de son parterre soit la plus grande possible.

Exercice 21

L'unité étant le cm, on considère un triangle isocèle ABC de sommet principal A tel que BC = AH = 12 où H est le milieu de [BC].

On inscrit dans ce triangle un rectangle MNPQ (P et Q appartiennent à [BC], $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$).

1) On pose BQ = x, exprimer l'aire de ce rectangle en fonction de x.

2) Déterminer les dimensions de ce rectangle de surface maximale.

Corrigés

Exercice 1

1) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$

f est dérivable sur IR et $f'(x) = x - 2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$f(2) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f' (x)	−	0	+
f (x)	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

Donc pour tout réel x, $f(x) \leq 1$

L'ensemble des images I est $[1, +\infty[$

2) si $y_0 = 1$ y_0 a un antécédent unique égal à 2

si $y_0 \neq 1$ Déterminons x tel que $f(x) = y_0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 = y_0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - 2x + (3 - y_0) = 0$

$\Delta' = (-1)^2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}y_0 = \frac{1}{2}(y_0 - 1)$.

Or $y_0 > 1$ donc $y_0 - 1 > 0$ par suite $\Delta' > 0$. D'où $x = 2(1 - \sqrt{\Delta'})$ ou $x = 2(1 + \sqrt{\Delta'})$

Ainsi y_0 a deux antécédents : $2\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}(y_0 - 1)}\right)$ et $2\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}(y_0 - 1)}\right)$

Exercice 6

1) $f(x) = ax^3 + bx + 2$, $a \neq 0$

f est dérivable sur IR et $f'(x) = 3ax^2 + b$

Pour que f admette deux extremums il faut et il suffit que l'équation $3ax^2 + b = 0$ admette deux solutions distinctes.

$3ax^2 + b = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 = -b \Leftrightarrow x^2 = \frac{-b}{3a}$ car $a \neq 0$

pour cela il faut et suffit que $\frac{-b}{3a} > 0$ ou encore a et b soient de signes contraires et $b \neq 0$.

1er cas $a > 0$ et $b < 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} ax^3 = +\infty$ $(a > 0)$, de même $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{-\frac{b}{3a}}$ ou $x = \sqrt{-\frac{b}{3a}}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{-b}{3a}}$		$\sqrt{\frac{-b}{3a}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	α	↘	β	↗	$+\infty$

$\alpha = f\left(-\sqrt{\frac{-b}{3a}}\right)$ et $\beta = f\left(\sqrt{\frac{-b}{3a}}\right)$

2ème cas $a < 0$ et $b > 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} ax^3 = +\infty$ $(a < 0)$, de même $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{-b}{3a}}$		$\sqrt{\frac{-b}{3a}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	α	↗	β	↘	$-\infty$

Exercice 7

1) $\begin{cases} f(2) = 18 \\ f(-3) = -12 \\ f(3) = 42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = 18 \\ 9a - 3b + c = -12 \\ 9a + 3b + c = 42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 9 \\ c = -12 \end{cases}$

D'où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 9x - 12$

2) a) f est dérivable sur IR et $f'(x) = 6x+9$

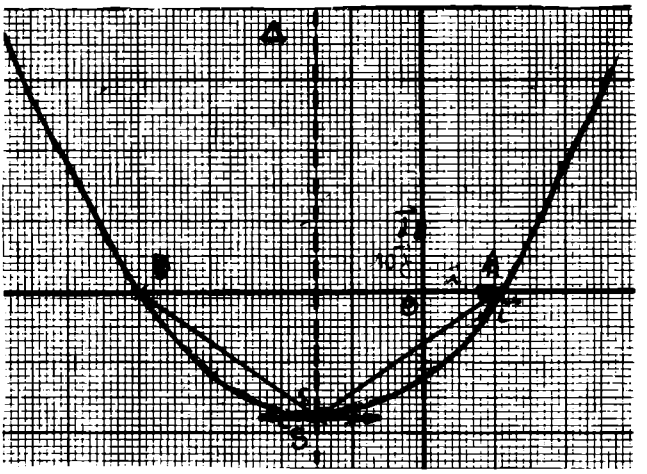
$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6x + 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{3}{2}$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{75}{4}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

D'où le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$-\frac{75}{4}$	↗	$+\infty$



3)

$$(E) : 3x^2 + 9x - 12 - \frac{1}{m} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \frac{1}{m}$$

Le nombre de solutions de l'équation (E) est égal au nombre de points d'intersection de la courbe (C) et de la droite Δ dont une équation est $y = \frac{1}{m}$

Si $\frac{1}{m} < -\frac{75}{4} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{4}{75} < m < 0$: $(C) \cap \Delta = \emptyset$

Alors l'équation (E) n'admet pas de solutions.

Si $\frac{1}{m} = -\frac{75}{4} \Leftrightarrow m = -\frac{4}{75}$ $(C) \cap \Delta = \{S\}$

Alors l'équation (E) admet une solution unique.

Si $\frac{1}{m} > -\frac{75}{4} \Leftrightarrow m > 0$ ou $m < -\frac{4}{75}$: $(C) \cap \Delta = \{M, N\}$

Alors l'équation (E) admet deux solutions distinctes.

4) $f(x) = mx - 15 \Leftrightarrow 3x^2 + (9 - m)x + 3 = 0$

$\Delta = (9 - m)^2 - 36 = m^2 - 18m + 45$

D_m coupe (C) en un seul point si et seulement si $\Delta = 0$, c'est à dire $m^2 - 18m + 45 = 0$

$\delta' = (9)^2 - 45 = (6)^2$. D'où $m_1 = 15$ et $m_2 = 3$

Ainsi D_m coupe (C) en un seul point si et seulement si $m = 3$ ou $m = 15$

Pour $m = 3$

$f(x) = 3x - 15 \Leftrightarrow 3(x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

(C) et D_3 se rencontrent en le point T_1 (-1, - 18).

Pour $m = 15$, $f(x) = 15x - 15 \Leftrightarrow 3(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

(C) et D_{15} se rencontrent en le point T ' (1, 0) .

5) L'équation $f(x) = 0$ admet une solution évidente, $x_1 = 1$, l'autre étant $x_2 = -4$.

Posons A(1, 0) et B (- 4, 0), donc (AB) est l'axe des abscisses .

La droite $\Delta : x = -\frac{3}{2}$ est un axe de symétrie de la parabole (C)

Δ étant parallèle à l'axe des ordonnées et comme l'axe des abscisses est perpendiculaire à l'axe des ordonnées donc Δ est perpendiculaire à (AB).

Soit I le milieu de [AB], $I(-\frac{3}{2}, 0)$.

Par suite I est un point de Δ, donc A et B sont symetriques par rapport à Δ ; donc SA = SB (S est un point de Δ).

Conclusion : Le triangle SAB est isocèle de sommet principal S.

Exercice 8

1) $f_m(x) = (m-2)x^2 + mx - 2m + 8$

Si $m = 2$; alors $f_2(x) = 2x+4$. C_2 est alors une droite

Si $m \neq 2$; C_m est alors une parabole .

2) Soit M(x, y) un point du plan.

$M \in C_m$ pour tout point $m \in \mathbb{R}$, signifie que

$m(x^2 + x - 2) - 2x^2 + 8 - y = 0$, pour tout $m \in \mathbb{R}$

c'est à dire $\begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ y = -2x^2 + 8 \end{cases}$

c'est à dire $\begin{cases} (x - 1)(x + 2) = 0 \\ y = -2x^2 + 8 \end{cases}$

Ainsi il existe deux points distincts A(1,6) et B(-2,0) appartenant à toutes les courbes C_m

3) a) $C(-1, 4) \in C_m \Leftrightarrow f_m(-1) = 4 \Leftrightarrow m = 1$

b) Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point donné du plan. Il existe une courbe C_m passant par M_0 si et seulement si il existe un réel m tel que $f_m(x_0) = y_0$

c'est à dire $y_0 = m(x_0^2 + x_0 - 2) - 2x_0^2 + 8$

$x_0^2 + x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 1)(x_0 + 2) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$ ou $x_0 = -2$

$-2x_0^2 + 8 - y_0 = 0 \Leftrightarrow y_0 = -2x_0^2 + 8$

Ainsi si $M_0(1, 6)$ ou $M_0(-2, 0)$ alors toute les courbes C_m passent par ces points.

* Si $M_0(1, y_0)$ avec $y_0 \neq 6$ ou $M_0(-2, y_0)$ avec $y_0 \neq 0$

Alors il n'existe pas de courbe C_m passant par ces points .

* Si $M_0(x_0, y_0)$ avec $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$.

Alors il existe une courbe unique C_m passant par M_0, avec $m = \dfrac{y_0 + 2x_0^2 - 8}{x_0^2 + x_0 - 2}$

Exercice 9

1) Si $m = -1, f_{-1}(x) = 2x - 4$; $\mathcal{P}_{-1}$ est une droite

Si $m \neq -1, \mathcal{P}_m$ est une parabole de sommet S_m d'abscisse $x_m = \dfrac{3m+1}{2(m+1)}$

2) Soit M(x,y) un point du plan.

$M \in \mathcal{P}_m$ pour tout $m \in IR \Leftrightarrow y = f_m(x)$ pour tout $m \in IR$

c'est à dire $m(x^2 - 3x + 2) + x^2 - x - 2 - y = 0$ pour tout $m \in IR$

c'est à dire $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ y = x2 - x - 2 \end{cases}$ D'où $\begin{cases} x = 2 \text{ ou } x = 1 \\ y = x^2 - x - 2 \end{cases}$

Ainsi il existe deux points A (2,0) et B (1,-2) appartenant à toutes les courbes $\mathcal{P}_m$

3) a) f_m est dérivable sur IR et $f'_m(x) = 2(m+1)x - (3m+1)$.

A est le sommet de $\mathcal{P}_a$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} f'_m(2) = 0 \\ f_m(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow f'_m(2) = 0$ (car $A \in \mathcal{P}_m$ pour tout réel m)

$\Leftrightarrow 2(m+1).2 - (3m+1) = 0 \Leftrightarrow m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -3$

B et le sommet de $\mathcal{P}_b \Leftrightarrow f'_m(1) = 0$ et $f_m(1) = -2$

$\Leftrightarrow f'_m(1) = 0$

$\Leftrightarrow 2(m+1) - (3m+1) = 0 \Leftrightarrow m = 1$

b)

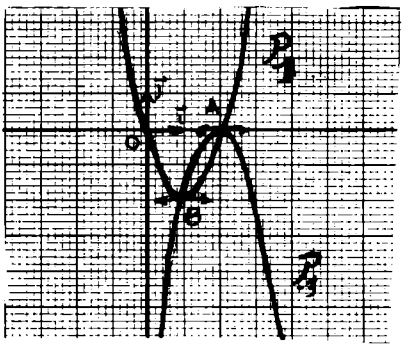
x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'_{-3}(x)$		+	0	−	
f_{-3}	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'_1(x)$		−	0	+	
f_1	$+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

$M(x,y) \in \mathcal{P}_{-3} \cap \mathcal{P}_1$ donc $f_{-3}(x) = f_1(x)$ par suite $f_{-3}(x) - f_1(x) = 0$.

Or cette équation du second degré admet au plus 2 solutions, donc $\mathcal{P}_{-3} \cap \mathcal{P}_1$ est formé de 0 , 1 ou 2 points.

Or A et B sont deux points communs à $\mathcal{P}_{-3}$ et $\mathcal{P}_1$ par suite $\mathcal{P}_{-3} \cap \mathcal{P}_1 = \{A,B\}$.



d) Soit D le milieu de [AB] . A(2,0) ; B (1,-2) donc D $(\frac{3}{2}, -1)$.

Soit M $(x, -2x^2 + 8x - 8)$ un point de $\mathcal{P}_{-3}$ et M'(X,Y) le symétrique de M par rapport à D.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+X}{2} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{-2x^2+8x-8+Y}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - X \\ Y = 2x^2 - 8x + 6 \end{cases}$$

D'où $Y = 2(3-X)^2 - 8(3-X) + 6 = 2X^2 - 4X = f_1(X)$

Donc $S_D(\mathcal{P}_{-3}) \subset \mathcal{P}_1$.

Comme la symetrie de centre D est bijective et sa réciproque est-elle même, alors les antécédents de $\mathcal{P}_1$ par S_D sont inclus dans $\mathcal{P}_{-3}$, par suite $S_D(\mathcal{P}_{-3}) = \mathcal{P}_1$.

$\mathcal{P}_{-3}$ et $\mathcal{P}_1$ sont alors symétriques par rapport au point D

4) Soit Δ la tangente à $\mathcal{P}_1$ en A (2,0)

$f'_1(x) = 4x - 4$ donc $f'(2) = 8 - 4 = 4$

D'où $\Delta : y = 4x - 8$

Soit Δ' la tangente à $\mathcal{P}_m$ en A

$f'_m(2) = 4m + 4 - 3m - 1 = m + 3$

$\Delta' : y' = (m + 3)x - 2(m + 3)$

Rappelons que deux droites sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs et égal à -1.

Ainsi $\Delta \perp \Delta' \Leftrightarrow 4(m + 3) = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{13}{4}$

Les tangentes en A aux paraboles $\mathcal{P}_b$ et $\mathcal{P}_c$ sont perpendiculaires si et seulement si $c = -\frac{13}{4}$

Exercice 11

1) $f(x) = -x^3 + 3x + 2$

f est dérivable sur IR et $f'(x) = -3x^2 + 3$

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \quad$ ou $\quad x = -1$

$f(-1) = 0 \quad$ et $\quad f(1) = 4$

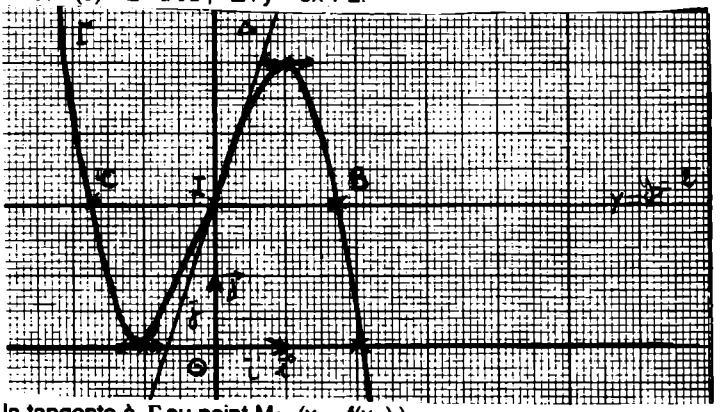
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad$ et $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	$-\infty$

$\lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$. La courbe Γ admet deux branches paraboliques de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.

2) Soit Δ la tangente à Γ au point I (0, 2).

On a $f'(0) = 3$ et $f(0) = 2$ d'où ; $\Delta : y = 3x + 2$.



3) a) Soit Δ_0 la tangente à Γ au point M_0 $(x_0 , f(x_0))$

Alors ona $\Delta_0 : y = (-3x_0^2 + 3)(x - x_0) + (-x_0^3 + 3x_0 + 2) \Leftrightarrow \Delta_0 : y = (-3x_0^2 + 3)x + 2x_0^3 + 2$.

Δ_0 coupe Γ en un point M_1 d'abscisse x signifie, $f(x) = (-3x_0^2 + 3)x + 2x_0^3 + 2$.

C'est à dire $-x^3 + 3x + 2 = (-3x_0^2 + 3)x + 2x_0^3 + 2$

Soit $-x^3 + 3x.x_0^2 - 3x_0^3 = 0$ (E) , ce qu'il fallait démontrer.

b) L'équation $-x^3 + 3x_0^2.x - 2x_0^3 = 0$, admet x_0 comme solution en effet :

$$-x_0^3 + 3x_0^2.x_0 - 2x_0^3 = 0$$

Alors il existe trois réels a,b et c tels que : $-x^3 + 3x_0^2.x - 2x_0^3 = (x - x_0)(ax^2 + bx + c)$.

Ce qui signifie, $-x^3 + 3x_0^2.x - 2x_0^3 = ax^3 + (b - ax_0)x^2 + (c - bx_0)x - cx_0$

par suite :

$$\begin{cases} a = -1 \\ b - ax_0 = 0 \\ c - bx_0 = 3x_0 \\ -cx_0 = -2x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -x_0 \\ c = 2x_0^2 \end{cases}$$

c) On rappelle que la tangente à Γ en I ne recoupe pas Γ.

On suppose alors que $M_0 \neq I$

Δ_0 recoupe Γ en M_1 et $M_1 \neq M_0$ si et seulement si, $-x^2 - x_0x + 2x_0^2 = 0$ (E')

$\delta = x_0^2 + 8x_0^2 = (3x_0)^2 > 0$ (car $x_0 \neq 0$)

L'équation (E') admet alors deux solutions distinctes : $x' = x_0$ et $x'' = -2x_0$

Ainsi la tangente Δ_0 recoupe Γ en un point unique M_1 d'abscisse $-2x_0$.

4) a) Résolvons dans IR l'équation $f(x) = 2$

$f(x) = 2 \Leftrightarrow -x^3 + 3x + 2 = 2 \Leftrightarrow -x^3 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(-x^2 + 3) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 = 3$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$

b) Posons $A(0, 2)$, $B(\sqrt{3}, 2)$ et $C(-\sqrt{3}, 2)$

Comme $A = I$ alors $A_1 = I$ d'où $A_1(0, 2)$

$B_1(-2\sqrt{3}, \alpha)$ et $C_1(2\sqrt{3}, \beta)$ où $\alpha = f(-2\sqrt{3}) = 18\sqrt{3} + 2$ et $\beta = f(2\sqrt{3}) = -18\sqrt{3} + 2$

Alors $\overrightarrow{A_1B_1} \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 18\sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A_1C_1} \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ -18\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{A_1B_1} = -\overrightarrow{A_1C_1}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{A_1B_1}$ et $\overrightarrow{A_1C_1}$ sont colinéaires, donc les points A_1, B_1 et C_1 sont alignés.

Exercice 14

1) a)

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	$\frac{5}{3}$	↘	$\frac{1}{3}$	↗	$+\infty$

b) $\Delta : y = -x + 1$

$f(x) - (-x+1) = \frac{1}{3} \cdot x^3$

* Si $x > 0$ alors C_f est située au dessus de Δ

* Si $x < 0$ alors C_f est située au desous de Δ

* Si $x = 0$ alors C_f et Δ se rencontrent en I.

2) Pour tout $x \in D_f$, on a $(-x)\ D_f$

$$f(-x) = -\frac{1}{3} \cdot x^3 + x + 1 = -\left(\frac{1}{3}x^3 - x + 1\right) + 2 = 2 - f(x)$$

Donc le point I (0,1) est un centre de symetrie de C_f

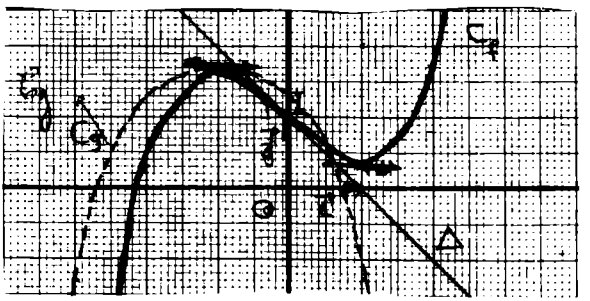
3) $g(x) = ax^2 + bx + c$ et $g'(x) = 2ax + b$. Le sommet de C_g a pour coordonnées $(-1, \frac{5}{3})$

donc $g'(-1) = 0$ et $g(-1) = \frac{5}{3}$; comme $g(1) = \frac{1}{3}$ alors on obtient :

$$\begin{cases} g(-1) = \frac{5}{3} \\ g'(-1) = 0 \\ g(1) = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = \frac{5}{3} \\ -2a + b = 0 \\ a + b + c = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{2}{3} \\ c = \frac{4}{3} \end{cases}$$

D'où $g(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$

4)



5) a) Soit M(x,y) un point du plan.

$M \in C_g \cap D_m$ signifie $-\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} = mx$

Soit l'équation (E) : $-\frac{1}{3}x^2 - (\frac{2}{3} + m)x + \frac{4}{3} = 0$

(E) admet deux solutions distinctes si et seulement si son discriminant est strictement positif.

$$\Delta = (\frac{2}{3} + m)^2 + \frac{16}{9} > 0$$

Ainsi D_m coupe C_g en deux points distincts A et B

b)On désigne par a et b les abscisses respectives de A et B . Alors A(a,ma) et B(b,mb)

Soit M (X,Y) le milieu de [AB].

Alors $X = \frac{a+b}{2}$ et $Y = m\frac{a+b}{2}$

Or $a + b = -\frac{-(\frac{2}{3} + m)}{\frac{-1}{3}} = -3m - 2$

D'où $2X = -3m - 2$ c'est à dire $m = -\frac{2X+2}{3}$

Ainsi $Y = -(\frac{2X+2}{3})X = -\frac{2}{3}X^2 - \frac{2}{3}X$

L'ensemble des points M est alors la parabole, dont une équation est :

$$Y = -\frac{2}{3}X^2 - \frac{2}{3}X$$

Exercice 18

A : Etude du coût de la production

1) a) $f(x) = 0,1x^3 - 3x^2 + 30x \qquad x \in [0, 20]$

$f'(x) = 3(0,1x^2) - 2(3x) + 30$

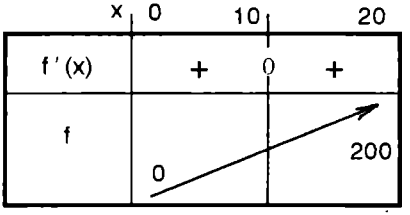
$= 0,3x^2 - 6x + 30$

$f'(x) = 0 \iff 0,3x^2 - 6x + 30 = 0$

$\Delta' = (-3)^2 - (0,3)(30) = 9 - 9 = 0$

D'où $x' = x'' = 10$.

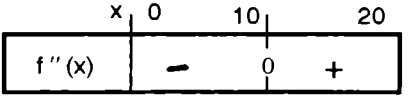
Ainsi pour tout x de I , $f'(x) \geq 0$, donc f est strictement croissante sur [0, 20].



x	2	5	8	10	15	18	20
f (x)	48,8	87,5	99,2	100	112,5	151,2	200

2) a) f'est dérivable sur IR et $f''(x) = (0,3)(2x) - 6 = 0,6x - 6$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 0,6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 10$



I (10, 100) est un point d'inflexion de C

b) Soit (T) la tangente à C au point I.

Comme f' (10)=0 donc Test horizontale et une équation de (T) est $y = 100$

B : Etude du bénéfice

1) a) Chaque unité est vendue à 8400 dinars. La recette est alors $g(x) = 8,4x$ (en milliers de dinars). Le bénéfice est donné par la fonction h tel que $h(x) = g(x) - f(x)$ où $x \in I$

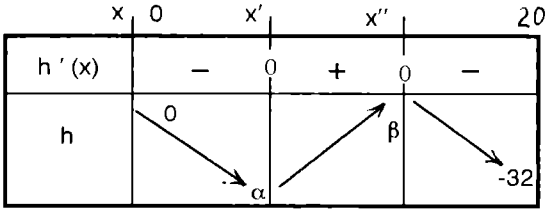
$h(x) = 8,4x - (0,1x^3 - 3x^2 + 30x) = -0,1x^3 + 3x^2 - 21,6x$

b) h est dérivable sur I et $h'(x) = -0,3x^2 + 6x - 21,6$

$\Delta' = 3^2 - 6,48 = 2,52 > 0$

$$x' = \frac{3 - \sqrt{2,52}}{0,3} \approx 4,7 \in [0, 20]$$

$$x'' = \frac{3 + \sqrt{2,52}}{0,3} \approx 15,29 \in [0, 20]$$



$\beta = h(x'')$; $\beta \approx 13,540$.

Le bénéfice est maximum pour $x = \frac{3 + 2\sqrt{2,52}}{0,3}$, et il est égal environ à 13540 dinars

2) a) $h(x) = 0 \Leftrightarrow -0,1x^3 + 3x^2 - 21,6x = 0$

$\Leftrightarrow x(-0,1x^2 + 3x - 21,6) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $-0,1x^2 + 3x - 21,6 = 0$

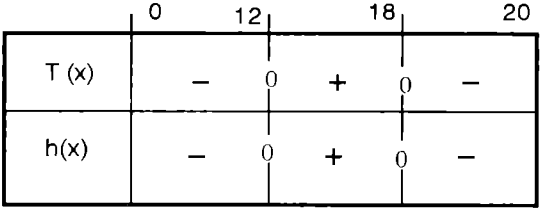
Posons $T(x) = -0,1x^2 + 3x - 21,6$

Résolvons $T(x) = 0$

$\Delta = 9 - 8,64 = 0,36 = (0,6)^2$

$x' = 12$

$x'' = 18$



c) Ainsi $h(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in [12, 18]$.

Pour conclure, cette production n'est rentable que si x est compris entre 12 et 18.

Le bénéfice est maximum pour $x \approx 15,29$.

Exercice 21

1) Comme P∈[BC] et que Q∈[BC] alors la droite (MN) est parallèle à (BC), il s'en suit que les droites parallèles. (MQ) et (NP) sont perpendiculaires à (BC), c'est à dire elles sont parallèles à (AH). Les triangles ABH et MBQ sont semblables, alors on a :

$$\frac{BQ}{BH} = \frac{MQ}{AH} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{6} = \frac{MQ}{12}$$

ce qui donne MQ = 2x

Par des raisons de symétrie,ona PQ=BC-2x ; c'est à dire PQ=12-2x.

Alors l'aire du rectangle MNPQ est : MQ.PQ = 4x (6 - x).

2) On pose $f(x) = -4x^2 + 24x$ avec $x \in [0, 6]$

f est dérivable sur [0, 6] et $f'(x) = -8x + 24$, f' s'annule et change de signe pour x = 3, donc f admet un maximum absolu pour x = 3.

Les dimensions du rectangle correspondant sont alors : MQ = 6 et PQ = 6.

MNPQ est ainsi un carré

EXEMPLES DE FONCTIONS RATIONNELLES

Exercices

Exercice 1 (N.C)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$, a,b,d sont des réels et c un réel non nul.

(Γ) désigne la courbe de f dans un plan muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Déteminer les réels a,b c et d sachant que

a) (Γ) passe par les points A(2,13) B(0,-3) et C(-1,1).

b) (Γ) passe par le point A(2,-1) et admet comme asymptôte les D et D' d'équation respectives $x = -\frac{5}{4}$ et $y = \frac{1}{4}$.

c) (Γ) passe par les points A $(2, \frac{8}{7})$ et B $(1, \frac{5}{3})$ et admet comme asymptôte la droite D dont une équation est $y = \frac{3}{4}$

d) (Γ) passe par le point A$(4, -\frac{1}{3})$; admet comme asymptôte la droite D dont une équation est $x = \frac{5}{2}$, et tangente à la droite Δ dont une équation est $y + x - 1 = 0$.

e) c = 1; (Γ) passe par le point A (-1,1) et B $(-3, \frac{7}{3})$ et est tangente à la droite D dont une équation est : $y = -4x+1$.

Exercice 2 (N.C)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x - 2}{x + 1}$

1) Etudier la fonction f et tracer sa courbe (C) dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2) Déduire de (C) la représentaion graphique de chacune des fonctions :

$f_1 : x \rightarrow |f(x)|$; $f_2 : x \rightarrow f(|x|)$; $f_3 : x \rightarrow \frac{x-2}{|x+1|}$; $f_4 : x \rightarrow \frac{-2x-8}{x+1}$

(On pourra remarquer que $f_4 - f$ est une fonction constante).

Exercice 3 (N.C)

1) Etudier la fonctionf : $x \rightarrow \frac{|x+2|+|2x-4|}{|x-1|}$

2) Construire sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Préciser les tangentes aux points particuliers.

Exercice 4 (N.C)

Soit la fonction $f : x \rightarrow \frac{a}{x}$; $a \in IR^*$. (C) désigne la courbe de f dans un plan muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Une droite de coefficient directeur m coupe la courbe (C) en deux points M' et M" et ses asymptotes en P'et P".

Montrer que [M' M"] et [P' P"] ont le même milieu.

b) En déduire une construction d'un point d'une hyperbole connaissant ses asymptôtes et un point A qui lui appartient.

Exercice 5 (N.C)

Soit la fonction $f_m : x \rightarrow \frac{mx-2}{x-m+1}$ où m est un paramètre réel.

Montrer que C_m passe par deux points fixes A et B. Calculer en fonction de m les coefficients directeurs des tangentes en A et B à la courbe C_m. Déterminer m pour que ces tangentes soit perpendiculaires à la droite (AB).

Exercice 6

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

1) Etudier la fonction f et tracer sa courbe (C) dans un plan muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2) Déterminer une équation de chacune des tangentes à (C) respectivement aux points A d'abscisse 2 et A' d'abscisse 0.

Que peut-on dire de ces droites ?

3) Déterminer graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre des points d'intersection de (C) avec la droite D_m d'équation : $y = -3x + m$.

4) Soient M et M' les points d'intesection de (C) et D_m (lorsqu'ils existent)

Calculer en fonction de m,les coordonnées du point I milieu de [MM']

Déterminer et construire l'ensemble des point I lorsque m varie

Exercice 7

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3 - x}{x + 2}$

1) Etudier la fonction f et construire sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2) Soit D_m la droite du plan d'équation $(y = 2x + m)$ où m est un paramètre réel

a) Montrer que pour tout $m \in IR$, (C) et D_m se coupent en deux points P' et P"

(on ne cherchera pas à calculer leurs coordonnées)

b) Montrer que le produit scalaire $\overrightarrow{OP'}.\overrightarrow{OP''}$ est constant lorsque m varie

3) Soit le point A(1 , 2)

Caculer en fonction de m le produit scalaire $\overrightarrow{AP'}.\overrightarrow{AP''}$.

En déduire m pour que le triangle P'AP" soit rectangle en A

Exercice 8

soit la fonction $f_m : x \rightarrow \dfrac{(m + 1)x - 3}{(1 - m)x + 2}$ où m est un paramètre réel

1) Etudier suivant les valeur de m, les variations de f_m

2) On désigne par C_m la courbe représentative de f_m dans un plan muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$, et par D la droite d'équation $y = x$

a) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles C_m rencontre D en deux points M' et M" distincts ou confondus.

b) Vérifier que le milieu de [M'M"] est un point fixe

3) Montrer que C_m passe par des points fixes

4) Soit $M_0 (x_0 , y_0)$ un point quelconque du plan

Déterminer le nombre des courbes C_m qui passent par M_0. Discuter

Exercice 9

Soit la fonction $f_m : x \rightarrow \dfrac{(2m - 1)x + m}{x - m}$ où m est paramètre réel .

C_m désigne la courbe de f_m dans un plan muni d'un repère orthogonal $(O , \vec{i} , \vec{j})$

1) Montrer que C_m passe par un point fixe A dont on déterminera les coordonnées

2) Quel est le coefficient directeur de la tangente à C_m en A ?

3) Montrer qu'il existe un second point P de C_m ou' la tangente est parallèle à la tangente en A

Calculer l'abscisse de ce point P en fonction de m

4) a) Déterminer les coordonées du point d'intersection des asymptotes de C_m et déterminer leur ensemble lorsque m varie

b) Connaissant l'un peut -on prévoir l'autre

Exercice 10

soit la fonction $f : x \rightarrow \dfrac{x^2 + x}{x - 1}$

D désigne le domaine de définition de f.

$\mathcal{C}$ désigne la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer qu'il existe trois réels a, b et c qu'on déterminera tels que pour tout $x \in D$

on ait $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$

2) Etudier les variations de f et construire $\mathcal{C}$.

Montrer que $\mathcal{C}$ admet un centre de symétrie

3) Déterminer suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre des solutions dans IR de l'équation $x^2 - (m - 1)x + m = 0$

Retrouver ces résultats en utulisant la courbe $\mathcal{C}$

4) Déduire de $\mathcal{C}$ la courbe d'équation : $y = \frac{|x(x+1)|}{x - 1}$

Exercice11 (N.C)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 2}{2x + 3}$

a) Montrer qu'il existe 3 réels a, b et c tels que pour tout $x \in IR \setminus \{-\frac{3}{2}\}$ on ait

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{2x + 3}$$

Etudier la fonction f et tracer sa courbe $\mathcal{C}$ dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Montrer que $\mathcal{C}$ admet un centre de symétrie

b) Utiliser le graphique pour discuter suivant les valeurs du paramètre réel p le nombre de solutions de l'equation : $2x^2 - 2(2 + p)x - 3p + 2 = 0$

Retrouver ce résultat par le calcul

c) Soit D_m la droite coefficient directeur m passant par $A(-\frac{3}{2} ; -\frac{20}{9})$

Etudier sur le graphique, suivant les valeurs de m , le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D_m.

Donner une équation qui permet de trouver les abscisses de ces points.

Exercice 12

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x\,(x - 1)}{2x - 1}$

$\mathcal{C}$ désigne la courbe représentative de f dans un plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

a) Etudier la fonction f et tracer $\mathcal{C}$

b) Ecrire les équations des tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses $(O, \vec{i})$.

c) Soit D_m la droite de coefficient directeur m et passant par A $(\dfrac{1}{2}, 0)$

Discuter suivant les valeurs de m le nombre des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D_m

d) Utiliser $\mathcal{C}$ pour discuter , suivant les valeurs de m le nombre des solutions dans $[0, \pi]$ de l'équation : $4\,(m - 1)\sin^2 t + 4\,(m - 1)\cos t - 5m + 4 = 0$

Exercice 13

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3 - x}{x}$

$\mathcal{C}$ désigne la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Etudier la fonction f et tracer sa courbe $\mathcal{C}$

2) Soient A et B les points de $\mathcal{C}$, d'abscisses respectives 1 et 3

Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB)

Trouver les équations des tangentes à $\mathcal{C}$ parallèles à (AB)

3) Une parallèle à (Oy) coupe $\mathcal{C}$ en M et (AB) en N, soit P le milieu de [MN]

Montrer que les coordonnées (x, y) de P vérifient l'équation : $y = \dfrac{-x^2 + 2x + 3}{2x}$

4) Etudier la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 3}{2x}$

Tracer sa courbe Γ dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

5) Déterminer les coordonnées du point P de Γ distinct de A tel que le triangle AMN correspondant soit isocèle de sommet principal A

Quelle autre particularité, ce triangle possède-t-il ?

Exercice 14

Soit f_m la fonction définie par $f_m(x) = \dfrac{x^2 + 5x + m}{x}$

où m est un paramètre réel

C_m désigne la courbe de f_m dans un plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Pour quelles valeurs de m , la fonction f_m est monotone dans les intervalles où elle est définie ?

2) Pour quelles valeurs de m, f_m admet-elle un maximum ou un minimum ?

Calculer alors les coordonnées des sommets de C_m et déterminer leurs ensembles lorsque m varie

3) A_m est le point où Cm rencontre la droite D dont une équation est x = 4

T_m est la tangente à C_m en A_m

Former une équation de Tm

Montrer que T_m coupe la droite Δ dont une équation est y = x + 5 en un point fixe B que l'on déterminera

Exercice 15

on considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{4x^2 - 11x + 7}{2(x - 2)}$

C désigne la courbe de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 2$ et $\|\vec{j}\| = 1$

1) Etudier les variations de f

2) Déterminer les deux asymptotes à C et déterminer leur point d'intersection Ω

b) Montrer que Ω est un centre de symétrie de C

c) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C avec les axes de coordonnées.

d) Construire C

3) Montrer qu'il existe deux tangentes à C de coefficient directeur $\dfrac{3}{2}$ et déterminer les coordonnées des points de contacts B et C de ces tangentes avec C

Vérifier que $C = S_\Omega(B)$

4) soit la fonction $f_m : x \mapsto \dfrac{4x^2 + (m-8)x - m + 4}{2(x-2)}$ dont la courbe représentative est

C_m où m est un paramètre réel

Montrer que C_m passe par un point fixe

5) Déterminer la courbe C_m qui passe par le point $I\left(\frac{7}{4}, 0\right)$

Excercice 16

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x + 8}{4(x-2)}$

1) Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ on ait

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{4(x-2)}$$

2) Etudier les variations de f et tracer sa courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Montrer que $\mathcal{C}$ admet un centre de symétrie Ω

3) soit S l'application du plan P sur lui même qui à tout point M(x,y) associe le point.

M'(x',y') tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y + \frac{4}{5} \\ y' = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{2}{5} \end{cases}$$

a) Montrer que S admet un unique point invariant

a) Montrer que S est une bijection et déterminer les expressions analytiques de S^{-1}

c) Déterminer une équation de la courbe $\mathcal{C}'$ transformée de $\mathcal{C}$ par S

Exercice 17

Soit la fonction f définie par $f(x) = |x + 1| + \dfrac{1}{x-1}$

$\mathcal{C}$ désigne la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Etudier les variations de f

2) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = -1$

3) Montrer que C admet deux asymptotes obliques

4) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C avec les axes des coordonnées

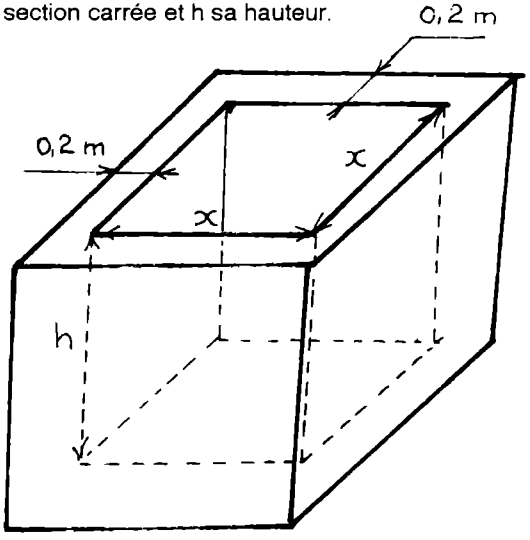
5) Construire C

6) Utiliser la courbe C pour déterminer, suivant les valeurs de m, le nombre et le signe des racines de l'équation : $(x - 1)\sqrt{x^2 + 2x + 1} - m(x - 1) + 1 = 0$

Exercice 18

Un maçon veut réaliser une cuve en béton parallélépipédique à base carrée, de 20cm d'épaisseur et pouvant contenir un volume de 4 m^3.

On note x le coté de la section carrée et h sa hauteur.



On veut déterminer h et x pour que le volume du béton soit minimum

1) Démontrer que le volume du béton utilisé est $V(x) = (x + \frac{2}{5})^2 (\frac{4}{x^2} + \frac{1}{5}) - 4$

2) Déterminer h et x pour que le volume du béton soit minimum

Exercice 19

On considère un cylindre dont le cercle de base est de rayon x et dont la hauteur est y.

On désigne par S l'aire totale du cylindre

1) Montrer que $y = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{S}{x} - 2\pi x \right)$

En déduire que le volume y du cylindre est $y = \frac{S}{2} x - \pi x^3$

2) Parmi les cylindres d'aire totale S donnée, déterminer celui dont le volume est maximal - calculer ce volume

Corrigés

Exercice 6

$f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$; $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$Df = IR \setminus \{1\}$.

f est une fonction rationnelle, donc elle est définie, continue et dérivable sur $IR \setminus \{1\}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

La droite d'équation (y = 2) est une asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

donc la droite d'équation (x = 1) est une asymptote à $\mathcal{C}$.

Pour tout $x \in IR \setminus \{1\}$ $f'(x) = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$

Pour tout $x \in IR \setminus \{1\}$, $f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'(x)	−	‖	−
f(x)	2 ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ 2

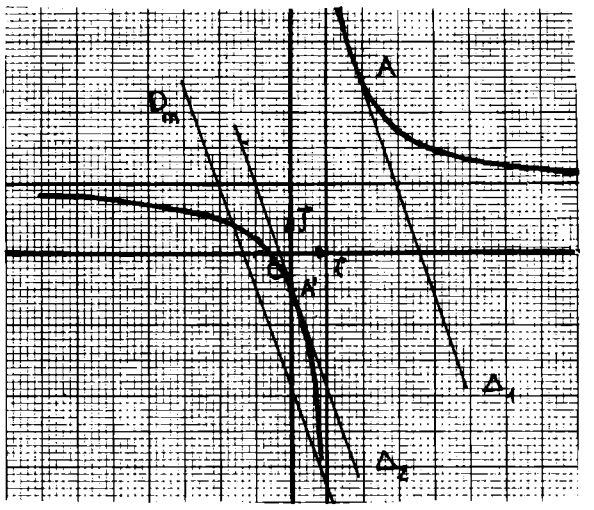
2) f (2) = 5 ; f (0) = -1

f' (2) = f' (0) = - 3.

Δ_1 la tangente en A (2 , 5) : $y - 5 = -3(x - 2) \Leftrightarrow y = -3x + 11$

Δ_2 la tangente en A' (0 , - 1) : $y + 1 = -3x \Leftrightarrow y = -3x - 1$

On remarque que Δ_1 et Δ_2 sont parallèles



3) Pour tout $m \in \mathbb{R}$ D_m est parallèle à Δ_1 et Δ_2

Si $m \in]-1, 11[$ $D_m \cap \mathcal{C} = \emptyset$

Si $m \in]-\infty, -1[\cup]11, +\infty[$ D_m et $\mathcal{C}$ se coupent en 2 points.

Si $m = -1$ $D_m \cap \mathcal{C} = \{A'\}$

Si $m = 11$ $D_m \cap \mathcal{C} = \{A\}$.

4) Si $m \in]-\infty, -1] \cup [11, +\infty[$ D_m coupe $\mathcal{C}$ en 2 points M et M' dont les abscisses satisfont à l'équation :

$$\frac{2x+1}{x-1} = -3x + m \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - (m+1)x + m + 1 = 0 \qquad \textbf{(E)}$$

x' l'abscisse de M et x" celle de M' sont solutions de (E). L'abscisse du point I milieu de [MM'] est $\frac{x' + x''}{2} = \frac{m+1}{6}$

Son ordonnée est : $-3\frac{m+1}{6} + m = \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}$

donc $I\left(\frac{m+1}{6} ; \frac{m-1}{2}\right)$

$I \in \Delta$; $\Delta : (AA') \setminus]AA'[$

L'ensemble des points I est la droite (AA') privée du segment ouvert] AA' [.

Exercice 7

$f : x \to \dfrac{3 - x}{x + 2}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

f est une fonction rationnelle, donc elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

La droite Δ ($y = -1$) est une asymptote à C au voisinage de $(+\infty)$ et de $(-\infty)$.

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$$

Donc la droite Δ' ($x = -2$) est une asymptote à C.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $f'(x) = \dfrac{-5}{(x+2)^2}$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ $f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty, -2[$ et $]-2, +\infty[$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-1	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	-1

$D_m : y = 2x + m$.

$$M(x,y) \in C \cap D_m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ y = \dfrac{3 - x}{x + 2} = 2x + m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ 2x^2 + (m + 5)x + 2m - 3 = 0 \quad (1) \\ y = 2x + m \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + (m+5)x + 2m - 3 = 0 \quad (1) \quad (x = -2 \text{ n'est pas solution de (1)}) \\ y = 2x + m \end{cases}$

$2x^2 + (m+5)x + 2m - 3 = 0$

$\Delta_m = (m+5)^2 - 8(2m-3) = m^2 - 6m + 49$

$\delta'_m = -40 < 0$

donc pour tout $m \in \mathbb{R}$ $\Delta_m > 0$

d'où $2x^2 + (m+5)x + 2m - 3 = 0$ admet deux solutions distinctes x' et x".

donc $\mathcal{C}$ et D_m se coupent en deux points P' (x', 2x' + m) et P" (x", 2x" + m).

b) $\overrightarrow{OP'} \begin{pmatrix} x' \\ 2x' + m \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OP''} \begin{pmatrix} x'' \\ 2x'' + m \end{pmatrix}$ où x' et x" sont solutions de l'équation **(1)**

$\overrightarrow{OP'} \cdot \overrightarrow{OP''} = x'x'' + (2x' + m)(2x'' + m) = 5x'x'' + 2m(x' + x'') + m^2$

$= 5\left(\frac{2m-3}{2}\right) - 2m\left(\frac{m+5}{2}\right) + m^2 = \frac{-15}{2}$

3) A (1, 2)

$\overrightarrow{AP'} \begin{pmatrix} x' - 1 \\ 2x' + m - 2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AP''} \begin{pmatrix} x'' - 1 \\ 2x' + m - 2 \end{pmatrix}$

$A \notin \mathcal{C}$ donc $\overrightarrow{AP'} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{AP''} \neq \vec{0}$

$\overrightarrow{AP'} \cdot \overrightarrow{AP''} = 5x'x'' + (2m-5)(x' + x'') + m^2 - 4m + 5$

$= 5\left(\frac{2m-3}{2}\right) - (2m-5)\left(\frac{m+5}{2}\right) + m^2 - 4m + 5$

$= -\frac{3}{2}m + 10$

AP'P" est un triangle rectangle en A si et seulement si $\overrightarrow{AP'} \cdot \overrightarrow{AP''} = 0$

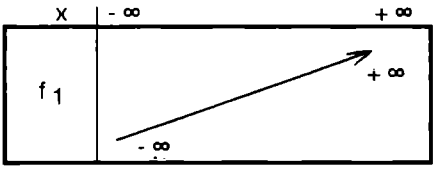
c'est à dire $m = \frac{20}{3}$

Exercice 8

$f_m : x \rightarrow \dfrac{(m+1)x - 3}{(1-m)x + 2}$

1) Si $m = 1$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = x - \dfrac{3}{2}$

f_1 est une fonction affine ; $D_{f1} = \mathbb{R}$; f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$



Si $m \neq 1$, f_m est une fonction rationnelle, $D_{fm} = \mathbb{R} \setminus \{ \dfrac{2}{m-1} \}$

f_m est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{ \dfrac{2}{m-1} \}$

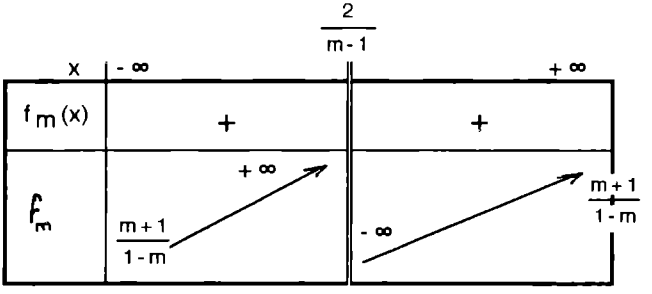
Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{ \dfrac{2}{m-1} \}$ on a

$f'_m(x) = \dfrac{-m+5}{[(1-m)x+2]^2}$

Si $m \in]-\infty, 1[\cup]1, 5[$ on a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{ \dfrac{2}{m-1} \}$ $f'_m(x) > 0$

Donc f_m est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty, \dfrac{2}{m-1}[$

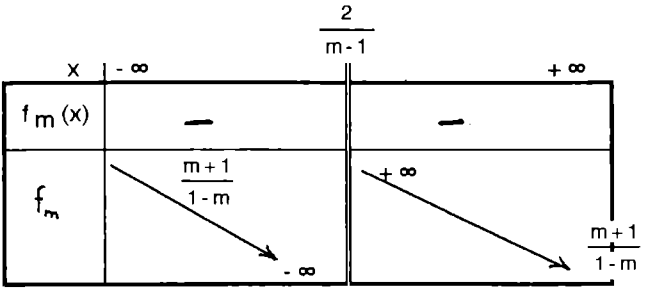
et $]\dfrac{2}{m-1}, +\infty[$



Si $m \in]5, +\infty[$ on a pour tout $x \in \mathbb{R} - \{ \dfrac{2}{m-1} \}$: $f'_m(x) < 0$

donc f_m est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty, \dfrac{2}{m-1}[$

et $]\dfrac{2}{m-1}, +\infty[$



2) Si m = 1 alors C_1 est une droite d'équation $y = x - \frac{3}{2}$

C_1 est strictement parallèle à D. $C_1 \cap D = \emptyset$

Pour $m \neq 1$.

$$M(x, y) \in C_m \cap D \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \neq \dfrac{2}{m-1} \\ \dfrac{(m+1)x - 3}{(1-m)x + 2} = x \\ y = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \neq \dfrac{2}{m-1} \\ (1-m)x^2 + (1-m)x + 3 = 0 \\ y = x \end{cases}$$

$C_m \cap D \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow (1-m)^2 - 12(1-m) > 0$ et $m \neq 1$

$\Leftrightarrow (m-1)(m+11) \geq 0$ et $m \neq 1$

$\Leftrightarrow m \in]-\infty, -11] \cup]1, +\infty[$

b) Si $m \in]-\infty, -11[\cup]1, +\infty[$ alors C_m rencontre D en deux points M' et M" d'abscisses respectives x' et x" solutions de l'équation $(1-m)x^2 + (1-m)x + 3 = 0$

M' et M" étant deux points de la droite D donc le milieu de [M'M"] l'est aussi.

Donc les coordonnées du point I, milieu de [M'M"] sont $X_I = Y_I = \frac{x' + x''}{2}$

d'où $X_I = Y_I = -\frac{1}{2}$ donc $I\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ est un point fixe.

3) $m \in IR$; si C_m passe par un point fixe M (x, y) alors M (x, y) $\in C_0 \cap C_1$

$$M(x, y) \in C_0 \cap C_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ \dfrac{x-3}{x+2} = x - \dfrac{3}{2} \\ y = x - \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x^2 - \dfrac{1}{2}x = 0 \\ y = x - \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases}$$

Donc $C_0 \cap C_1 = \{ A(0, -\frac{3}{2}) \ ; \ B(\frac{1}{2}, -1) \}$

Pour tout $m \in IR$; $0 \in D_{fm}$ et $f_m(0) = -\frac{3}{2}$

$\frac{2}{m-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = 5$

Pour tout $m \in IR \setminus \{5\}$; $\frac{1}{2} \in D_{fm}$; $f_m(\frac{1}{2}) = -1$

d'où pour tout $m \in IR$ $\quad A(0, -\frac{3}{2}) \in C_m$

et pour tout $m \in IR \setminus \{5\}$ $\quad B(\frac{1}{2}, -1) \in C_m$

4) Soit $M_0 (x_0, y_0)$ un point du plan

$$M_0(x_0, y_0) \in C_m \Leftrightarrow y_0 = \frac{(1+m)x_0 - 3}{(1-m)x_0 + 2} \Leftrightarrow m(x_0 + x_0 y_0) = x_0 y_0 - x_0 + 2y_0 + 3$$

Si $M_0 = A$ alors toutes les courbes C_m passe par M_0

Si $M_0 = B$ alors toutes les courbes C_m passent par M_0 , sauf C_5

Si $x_0 = 0$ et $y_0 \neq \frac{-3}{2}$ ou $x_0 \neq \frac{1}{2}$ et $y = -1$,

alors aucune courbe C_m ne passe par $M_0 (x_0 , y_0)$

Si $x_0 \neq 0$ et $y_0 \neq -1$ alors il existe C_m unique passant par M_0, où $m = \dfrac{x_0 y_0 - x_0 + 2y_0 + 3}{x_0 (1 + y_0)}$

Exercice 10

$f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x - 1}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

1) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 1}$

$\Leftrightarrow$ Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\dfrac{x^2 + x}{x - 1} = \dfrac{(ax + b)(x - 1) + c}{x - 1}$

$\Leftrightarrow x^2 + x = (ax + b)(x - 1) + c$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\Leftrightarrow x^2 + x = ax^2 + (b - a)x - b + c$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - a = 1 \\ -b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$$

d'où pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $f(x) = x + 2 + \dfrac{2}{x - 1}$

2) f est une fonction rationnelle, donc elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x} = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{1^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{1^+} f(x) = +\infty$

La droite Δ d'équation $x = 1$ est une asymptote à $\mathcal{C}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (x + 2)) = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (x - 2)) = 0$

Donc la droite D : $y = x + 2$ est une asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. $f(x) - (x + 2) = \dfrac{2}{x - 1}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x) - (x + 2)$		$-$	‖	$+$	

Donc si $x \in]-\infty, 1[$ $\mathcal{C}$ est au dessous de D et si $x \in]1, +\infty[$ $\mathcal{C}$ est au dessus de D.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{(x-1)^2} = \dfrac{(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})}{(x-1)^2}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \quad x \in]-\infty, 1 - \sqrt{2}[\cup]1 + \sqrt{2}, +\infty[$

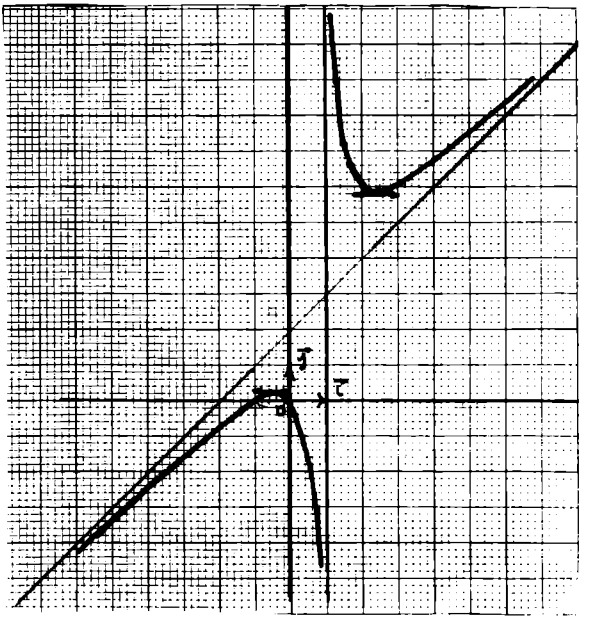
$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}[\setminus \{1\}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{2}$ ou $x = 1 + \sqrt{2}$

Donc f est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 1 - \sqrt{2}]$ et $[1 + \sqrt{2}, +\infty[$ et est strictement décroissante sur chacun des intervalles $[1 - \sqrt{2}, 1[$ et $]1, 1 + \sqrt{2}]$

$f(1 - \sqrt{2}) = 3 - 2\sqrt{2} + 3$ et $f(1 + \sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2}$.

x	$-\infty$		$1 - \sqrt{2}$		1		$1 + \sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	$-2\sqrt{2} + 3$	↘	$-\infty$	↘	$2\sqrt{2} + 3$	↗	$+\infty$



Soit Ω (1, 3)

Vérifions que Ω est un centre de symétrie de C

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$; on a $x \neq 1$ donc $2 - x \neq 1$, alors $2 - x \in D_f$

$$f(2-x) = \frac{(2-x)^2 + (2-x)}{(2-x) - 1} = \frac{x^2 - 5x + 6}{1-x} = \frac{x^2 + x}{1-x} + \frac{6 - 6x}{1-x} = -f(x) + 6$$

$$= 2.3 - f(x)$$

donc Ω (1,3) est un centre de symétrie de C.

3) $x^2 - (m-1)x + m = 0$ **(E)**

$\Delta_m = (m-1)^2 - 4m = m^2 - 6m + 1 = (m-3)^2 - 8 = (m - 3 - 2\sqrt{2})(m - 3 + 2\sqrt{2})$

$\Delta'_m = 0 \Leftrightarrow m = 3 - 2\sqrt{2}$ ou $m = 3 + 2\sqrt{2}$

$\Delta'_m > 0 \Leftrightarrow m \in]-\infty, 3 - 2\sqrt{2}[\cup]3 + \sqrt{2}, +\infty[$

$\Delta'_m < 0 \Leftrightarrow m \in]3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}[$

donc :

Si $m \in]-\infty, 3 - 2\sqrt{2}[\cup]3 + 2\sqrt{2}, +\infty[$ alors **(E)** admet deux racines distinctes.

Si $m \in \{3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}\}$ alors **(E)** admet une racine double

Si $m \in]3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}[$ alors **(E)** n'admet aucune solution réelle

On remarque que 1 n'est pas une solution de **(E)**

Donc **(E)** $\Leftrightarrow x^2 + x - mx + m = 0 \Leftrightarrow m(x-1) = x^2 + x \Leftrightarrow m = \frac{x^2 + x}{x - 1} = f(x)$

Soit D_m la droite dont une équation est $y = m$

On étudie l'intersection $D_m \cap C$

Si $m = 3 - 2\sqrt{2}$ ou $m = 3 + 2\sqrt{2}$, D_m rencontre C en un point unique, donc **(E)** admet une solution double.

Si $m \in]-\infty, 3 - 2\sqrt{2}[\cup]3 + 2\sqrt{2}, +\infty[$ alors D_m rencontre C en deux points distincts donc **(E)** admet deux solutions distincts.

Si $m \in]3 - 2\sqrt{2},\ 3 + 2\sqrt{2}[$ alors D_m et $\mathcal{C}$ sont disjoints donc **(E)** n'admet pas de solutions.

4)

$$M(x, y) \in \mathcal{C}' \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ y = \dfrac{|x(x+1)|}{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -f(x) \quad \text{si} \quad x \in]-1, 0[\\ y = f(x) \text{ si } x \in]-\infty, -1[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[\end{cases}$$

Exercice 12

f est une fonction rationnelle donc elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to \frac{1^-}{2}} f(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to \frac{1^+}{2}} f(x) = -\infty$

On vérifie facilement que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ on a $f(x) = x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2x-1)}$

$$\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) \right] = \lim_{x \to -\infty} \left(- \frac{1}{2(2x-1)} \right) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) \right] = \lim_{x \to +\infty} \left(- \frac{1}{2(2x-1)} \right) = 0$$

Donc la droite d'équation D : $y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

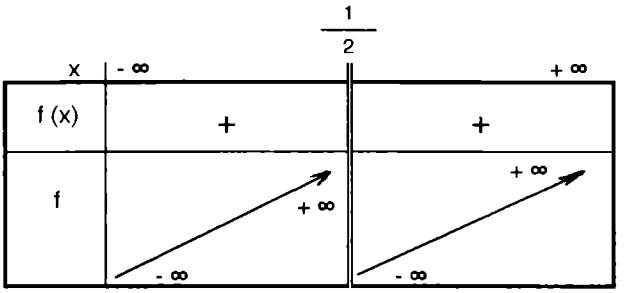
donc si $x \in]-\infty, \frac{1}{2}[$ alors $\mathcal{C}$ est située au dessus de D

si $x \in]\frac{1}{2}, +\infty[$ alors $\mathcal{C}$ est située au dessous de D

La droite D' dont une équation est $x = \frac{1}{2}$ est une asymptote à $\mathcal{C}$

$D' \cap D = \left\{ A\left(\frac{1}{2}, 0\right) \right\}$; A est un centre de symétrie de $\mathcal{C}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ on a $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{(2x-1)^2} > 0$



c) $M(x, y) \in C \cap (O, \vec{i}) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\} \\ f(x) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \\ y = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 1 \\ \\ y = 0 \end{cases}$

Donc C coupe $(O, \vec{i})$ aux points O (0, 0) et A_1 (1, 0)

La tangente à C en O a pour équation $y = 2x$

La tangente à C en A_1 (1, 0) a pour équation $y = 2(x - 1)$

d) Soit D_m la droite d'équation $y = m(x - \frac{1}{2})$

On remarque graphiquement que :

Si $m \geq 1$ alors $C \cap D_m = \emptyset$

Si $m < 1$ alors C rencontre D_m en deux points distincts

Analytiquement :

$M(x, y) \in C \cap D_m \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$ et x est solution de l'équation $f(x) = m(x - \frac{1}{2})$

$f(x) = m(x - \frac{1}{2}) \Leftrightarrow 2x(x - 1) = 2m(x - \frac{1}{2})^2$

$\Leftrightarrow (2m - 2)x^2 - (2m - 2)x + \frac{1}{2} m = 0$ **(E)**

1) m = 1 alors **(E)** n'admet pas de solutions, donc $\mathcal{C} \cap D_m = \emptyset$

2) $m \neq 1$, $\Delta'_m = (m-1)^2 - m(m-1) = -(m-1)$

Si $m > 1$ alors $\Delta'_m < 0$ d'où **(E)** n'admet pas de solutions, donc $\mathcal{C} \cap D_m = \emptyset$

Si $m < 1$ alors $\Delta'_m > 0$ d'où **(E)** admet deux solutions distinctes, donc $\mathcal{C}$ rencontre D_m en deux points distincts.

4) $4(m-1)\sin^2 t + 4(m-1)\cos t - 5m + 4 = 0$ **(E)**

$\Leftrightarrow 4(1-m)(\cos^2 t - 1) + 4(m-1)\cos t - 5m + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 4(1-m)\cos^2 t + 4(m-1)\cos t - 4m - 4 - 5m + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 4(m-1)\cos^2 t - 4(m-1)\cos t + m = 0$

$\Leftrightarrow 2(m-1)\cos^2 t - 2(m-1)\cos t + \frac{1}{2} m = 0$

$\Leftrightarrow f(\cos t) = m(\cos t - \frac{1}{2})$

t est solution de l'équation **(E)** si et seulement si le point M (cos t, f (cos t)) est un point de $D_m \cap \mathcal{C}$ avec $\cos t \in [-1, 1]$

Le nombre de solutions de l'équation (E) est alors le nombre des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et la droite D_m dont les abscisses appartiennent à [- 1, 1]

$f(-1) = -\frac{4}{3}$, le point I $(-1, -\frac{4}{3})$ appartient à D_m si seulement $m = \frac{8}{9}$

graphiquement, si $m \geq 1$ alors D_m ne rencontre pas $\mathcal{C}$, donc (E) n'admet pas de solutions.

Si $\frac{8}{9} < m < 1$ alors l'équation (E) n'admet pas de solutions

Si $0 < m < \frac{8}{9}$ alors (E) admet une solution unique

Si $m \leq 0$ alors (E) admet deux solutions.

Exercice 13

f est définie, continue et dérivable sur IR*

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -1$

La droite D d'équation y = - 1 est une asymptote à C au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

La droite Δ d'équation x = 0 est une asymptpte à $\mathcal{C}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$; $f'(x) = \frac{-3}{x^2} < 0$

Donc f est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f (x)	−	‖	−
f	- 1 ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ - 1

2) f (1) = 2 et f (3) = 0 donc A (1, 2) et B (3, 0)

Soit M (x, y) ; on a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$

$M \in (AB) \Leftrightarrow 2(y-2) + 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow y + x - 3 = 0 \Leftrightarrow y = -x + 3$

La tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ au point $M_0 (x_0, f(x_0))$ a pour coefficient directeur $f'(x_0)$

(T) est parallèle à (AB) $\Leftrightarrow f'(x_0) = -1 \Leftrightarrow \frac{-3}{x_0^2} = -1 \Leftrightarrow x_0^2 = 3$

$\Leftrightarrow x_0 = \sqrt{3}$ ou $x_0 = -\sqrt{3}$

$f(-\sqrt{3}) = -1 - \sqrt{3}$ et $f(\sqrt{3}) = -1 + \sqrt{3}$

$\mathcal{C}$ admet deux tangentes parallèles à (AB) respectivement aux points :

$A_1 (-\sqrt{3}, -1 - \sqrt{3})$ et $A_2 (\sqrt{3}, -1 + \sqrt{3})$

T_1 : la tangente à $\mathcal{C}$ en A_1 : $y = -x - 1 - 2\sqrt{3}$

T_2 : la tangente à $\mathcal{C}$ en A_2 : $y = -x - 1 + 2\sqrt{3}$.

3) On suppose que la parallèle Δ' à (Oy) a pour équation $x = x_0$

Δ' coupe $\mathcal{C}$ en M $(x_0, f(x_0))$ et (AB) en N $(x_0, -x_0 + 3)$

Soit P le milieu de [MN], alors P a pour coordonnées $\left(x_0 , \dfrac{f(x_0) - x_0 + 3}{2}\right)$

Soit $P\left(x_0 , \dfrac{-x_0^2 + 2x_0 + 3}{2x_0}\right)$

Donc P appartient à la courbe d'équation $y = \dfrac{-x^2 + 2x + 3}{2x}$

4) g est définie, continue et dérivable sur IR*

Pour tout $x \in IR^*$, $g(x) = -\dfrac{x}{2} + 1 + \dfrac{3}{2x}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{|x| \to +\infty} [g(x) - (-\dfrac{x}{2} + 1)] = 0$

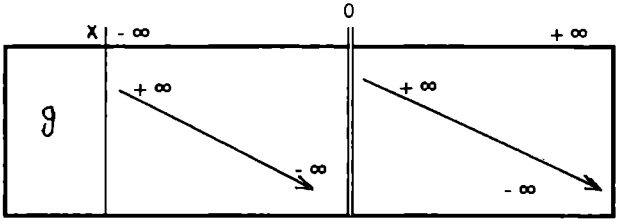
Donc la droite d'équation $y = -\dfrac{x}{2} + 1$ est une asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$

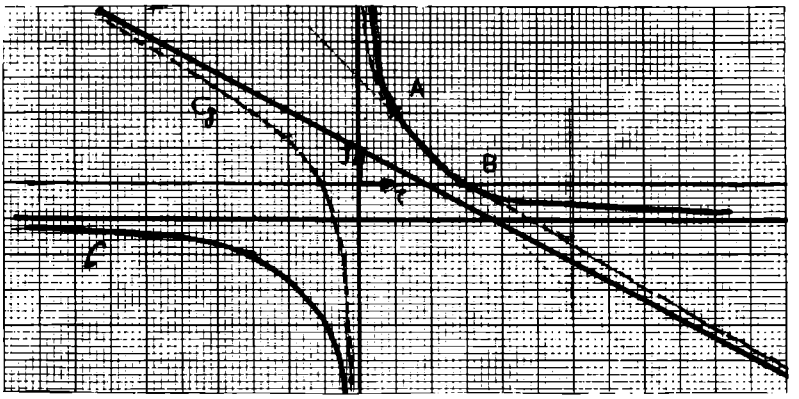
$\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$

Donc la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à $\mathcal{C}$

Pour tout $x \in IR^*$, $g'(x) = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2x^2} < 0$

Donc g est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$





5) $P \neq A$, P est le milieu de [MN]

AMN est un triangle isocèle du sommet principal A signifie que (AP) $\perp$ (MN) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}.\vec{j} = 0$

Or $\overrightarrow{AP} \begin{pmatrix} x - 1 \\ \dfrac{-x^2 - 2x + 3}{2x} - 2 \end{pmatrix}$

D'où $\overrightarrow{AP}.\vec{j} = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -3$

donc P (- 3, 1)

D'où M (- 3, - 2) et N (-3, 6) ; on vérifie que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = 0$

donc AMN est un triangle isocèle et rectangle en A.

Exercice 14

1) Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = x + 5 + \dfrac{m}{x}$

Si m = 0 alors pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f_0(x) = x + 5$

f_0 est la restriction d'une fonction affine strictement croissante sur chacun des intervalles

$]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

Si $m \neq 0$, f_m est une fonction rationnelle, donc elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$; $f'_m(x) = 1 - \dfrac{m}{x^2}$

* Si $m < 0$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) > 0$

donc si $m < 0$, f_m est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$

Si $m > 0$ nous obtenons le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{m}$		0		$\sqrt{m}$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f_m	$-\infty$	↗		↘	$+\infty$ ‖	↘		↗	$+\infty$

Donc si $m > 0$, f_m admet un maximum relatif en $-\sqrt{m}$ et un minimum relatif en $\sqrt{m}$

Si $m > 0$ alors $S'_m(-\sqrt{m}, f(-\sqrt{m}))$ et $S''_m(\sqrt{m}, f(\sqrt{m}))$ sont les sommets de C_m

$f(-\sqrt{m}) = -2\sqrt{m} + 5$, $f(\sqrt{m}) = 2\sqrt{m} + 5$

donc $S'_m(-\sqrt{m}, -2\sqrt{m} + 5)$ et $S''_m(\sqrt{m}, 2\sqrt{m} + 5)$

Lorsque m varie dans $\mathbb{R}_+^*$, le point S'_m décrit la demi droite dont une équation est :

$y = 2x + 5$ et $x < 0$

et S'' décrit la demi droite dont une équation est :

$y = 2x + 5$ et $x > 0$

donc S'_m et S''_m décrivent la droite D_1 : $y = 2x + 5$ privée du point A (0, 5)

3) On vérifie que A_m a pour coordonnées $(4, 9 + \dfrac{m}{4})$

$$f'_m(4) = 1 - \frac{m}{16}$$

Donc la tangente T_m à C_m en A_m a pour équation :

$$y = \left(1 - \frac{m}{16}\right)(x - 4) + 9 + \frac{m}{4}$$

Soit T_m : $y = (1 - \frac{m}{16})x + 5 + \frac{m}{2}$; $m \in IR^*$

$M(x, y) \in T_m \cap \Delta$ pour tout $m \in IR^* \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5 = (1 - \frac{m}{16})x + 5 + \frac{m}{2} \\ y = x + 5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{m}{16}x + \frac{m}{2} = 0 \\ y = x + 5 \end{cases}$

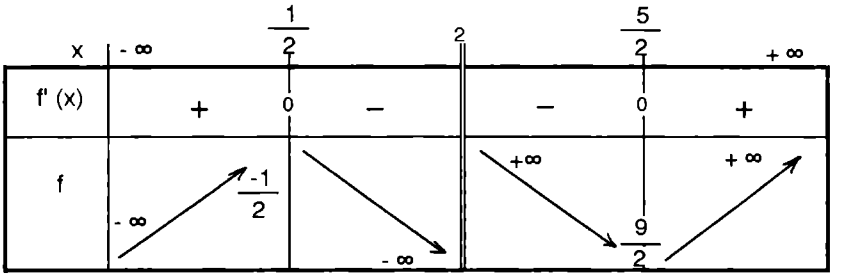
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 13 \end{cases}$

Donc Δ rencontre T_m en un point fixe B (8 , 13)

Exercice 15

$f(x) = 2x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2(x-2)}$

Tableau de variation de f



2) a) La courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique D au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$, dont une équation est $y = 2x - \frac{3}{2}$ et une asymptote verticale D' d'équation $x = 2$

Les asymptotes de $\mathcal{C}$ se coupent au point $\Omega(2, \frac{5}{2})$

$\mathcal{C}$ coupent $(O, \vec{i})$ aux points A (1, 0) et A' $(\frac{7}{4}, 0)$ et $(O, \vec{j})$ au point A" $(0, -\frac{7}{4})$

3) $f'(x_0) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \quad x_0 = 3$ ou $x_0 = 1$

Ainsi il existe deux points B(1, 0) et C(3, 5) où les tangentes à $\mathcal{C}$ ont pour coefficient directeur $\frac{3}{2}$

Le milieu de [BC] est le point de coordonnées $\left(\frac{1+3}{2}, \frac{5}{2} \right)$ donc $S_\Omega(B) = \mathcal{C}$

4) $\mathcal{C}_m$ passe par le point fixe B (1, 0)

La seule courbe $\mathcal{C}_m$ qui passe par I $\left(\frac{7}{4}, 0 \right)$ est la courbe $\mathcal{C}$ de f du 1°/

Exercice 16

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ $f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{3}{x-2}$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ $f'(x) = \frac{3x(x-4)}{4(x-2)^2}$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
f' (x)		+	0	−	‖	−	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	5	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	−1	↗	$+\infty$

La droite D : $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$ est une asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$

La droite D' : $x = 2$ est une asymptote à $\mathcal{C}$

$\Omega(2, 2)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}$

3) a) $S(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y + \frac{4}{5} \\ y = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 4 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

Donc S admet un seul point invariant I (1, 0)

b) $S(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y + \frac{4}{5} \\ y' = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - 2y' \\ y = 2x' + y' - 2 \end{cases}$

Donc S est une bijection et S^{-1} à pour expressions analytiques

$$\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = 2x + y - 2 \end{cases}$$

c) $M(x,y) \in C \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{3}{x-2}$ et $x \neq 2$

$$\Leftrightarrow 2x' + y' - 2 = \frac{3}{4}(x' - 2y) + \frac{1}{2} + \frac{3}{x' - 2y' - 2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{12}(x' - 2)^2 - \frac{5}{3}y'^2 - 1 = 0$$

Exercice 19

1) Le volume du béton utilisé est la différence des volumes V_1 et V_2 respectivement du grand et du petit parallélépipède.

On a $V_1 = (x + 0,4)^2 (h + 0,2)$ et $V_2 = x^2 . h$

Or $V_2 = 4\ m^3$, d'où $h = \frac{4}{x^2}$

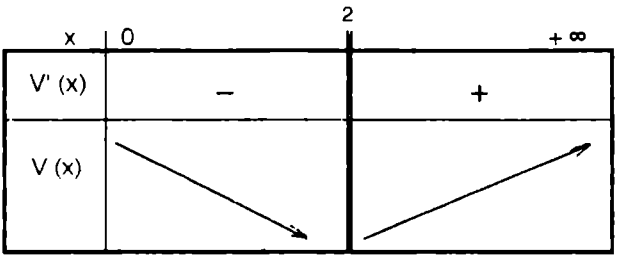
Ainsi $V = V_1 - V_2 = (x + 0,4)^2 (\frac{4}{x^2} + 0,2) - 4$

C'est à dire $V(x) = (x + \frac{2}{5})^2 (\frac{4}{x^2} + \frac{1}{5}) - 4$

2) $V'(x) = \frac{2}{5}(1 - \frac{8}{x^3})(x + \frac{2}{5})$ et $x > 0$

$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{8}{x^3} = 0$ et $x > 0 \Leftrightarrow x = 2$

D'où le tableau de variation de V



Ainsi le volume du béton est minimum si et seulement si x = 2m et h = 1m.

EXEMPLES DE FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

Exercices

Exercice 1

On considère les fonctions f et g définies sur IR par :

$f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ $\qquad$ $g(x) = -\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right)\right)^2$

et on note (C) et (C') leurs courbes représentatives respectives dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer f' (x) pour tout x réel

b) Etudier les variations de la restriction de f à l'intervalle $[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}]$

c) Construire (C).

2) a) Montrer qu'il existe une constante réelle α que l'on déterminera telle que pour tout réel x , $f(x) - g(x) = \alpha$

b) En déduire la construction de (C')

Exercice 2 (N.C)

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \sin 3x$

Etudier f et construire sa courbe représentative.

2) a) Exprimer pour tout réel x : $\cos^2 x (2 + 3\sin x) + \sin^2 x (1 - \sin x)$ en fonction de f(x)

b) Construire la courbe d'équation : $y = \cos^2 x (2 + 3\sin x) + \sin^2 x (1 - \sin x)$

Exercice 3

α et β étant deux paramètres réels ; on considère la fonction f définie sur IR par :

$f(x) = (\alpha - \beta)\cos^2 x + 2\alpha \sin x \cos x - (\alpha + \beta)\sin^2 x + 2\beta$

Ecrire f(x) sous la forme $A.\cos(2x - x_0) + B$ où A , x_0 et B sont des réels, indépendants de x que l'on déterminera.

Drésser le tableau de variation de la restriction de f à l'intervalle $[\frac{\pi}{8} , \frac{9\pi}{8}]$.

(Discuter suivant les valeurs du paramètre α). Construire la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O , \vec{i} , \vec{j})$) pour $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\beta = 0$

Exercice 4 (N.C)

1) Etudier et représenter graphiquement dans un plan P muni d'un repère orthonormé $(O , \vec{i} , \vec{j})$, la fonction f définie sur IR par $f(x) = \sin 2x$

2) Construire dans le plan P muni du même repère, les courbes d'équations respectives,

$y = 2 \mid \sin x \mid \cos x$ et $y = 2 \sin x \mid \cos x \mid$

Exercice 5 (N.C)

1) Etudier les variations de la fonction f définie sur $[0, \frac{\pi}{3}]$ par $f(x) = \cos 3x$

Construire sa courbe représentative (C) dans un plan rapporté à un repère $(O, \vec{i} , \vec{j})$.

On montrera en particulier que sa courbe représentative (C) possède un point d'inflexion I qui est aussi centre de symétrie de (C).

2) Déterminer toutes les applications affines dont les représentations graphiques admettent I comme centre de symétrie.

Exercice 6

Un plan P est muni d'un repère orthonormé $(O , \vec{i} , \vec{j})$

1) Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \frac{1}{2} \cos 2x$

Etudier f et construire sa courbe représentative (C)

2) Déduire la construction des courbes (C') d'équation $y = \cos^2 x$ et C" d'équation $y = \sin^2 x$.

Exercice 7

On considère les fonctions f et g définies sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par :

$f(x) = \sin 2x$ et $g(x) = \text{tg}x$

et on note (C) et (Γ) leurs courbes représentatives respectives dans un plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Etudier la position relative de (C) et (Γ) et construire ces courbes.

Exercice 8 (N.C)

Un plan est muni d'un repère orthonormé

1) Etudier et représenter graphiquement la fonction :

$$f :]\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}[\to \mathbb{R}$$

$$x \to \text{tg}(x + \frac{\pi}{3})$$

2) Soit la fonction g définie sur $]\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}[$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{4\,\text{tg}x}{1 - \sqrt{3}\,\text{tg}x} & \text{si} \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} \\ g(\dfrac{\pi}{2}) = -\dfrac{4\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

et on note (C) sa courbe représentative.

a) Vérifier que pour tout $x \in]\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}[$ on a $g(x) = f(x) - \sqrt{3}$

Déduire que g est continue , dérivable sur $]\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}[$

b) Donner une équation cartésienne de la droite (Δ) tangente à la courbe (C) en son point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$

Construire (Δ) et (C).

Exercice 9

Un plan P est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Etudier et représenter graphiquement la fonction

$$f :]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[\to \mathbb{R}$$

$$x \to \text{tg}(x + \frac{\pi}{4})$$

2) On considère la fonction $g :]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[\to \mathbb{R}$

$$x \to \begin{cases} g(x) = \dfrac{2}{1 - \text{tg}x} & \text{si} \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} \\ g(\dfrac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que g est continue et dérivable en $\frac{\pi}{2}$

(Pour étudier la dérivabilité de g en $\frac{\pi}{2}$ on pourra poser $h = x - \frac{\pi}{2}$)

b) Trouver une relation entre g(x) et f(x) valable pour tout x élément de $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ déduire la construction de la courbe représentative de g.

Exercice 10

1) On considère la fonction : f $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to 2x - \sin 2x$$

a) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

b) En vérifiant que pour tout x réel on a : $f(x) \geq 2x - 1$ et en utilisant la définition, montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

c) Etudier le signe de f (x) lorsque x décrit $[-\pi, \pi]$

Exercice 11 (N.C)

1) Montrer que pour tout réel x appartenant à une partie de IR que l'on précisera on a :

$$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\cos 2x}{1 + \sin 2x}$$

$$\operatorname{tg}^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x}$$

2) Construire dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes d'équations respectives : $y = \dfrac{-\cos 2x}{1 + \sin 2x}$

et

$$y^2 = \frac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x}$$

Exercice 12

1) Etudier la fonction f : $[-\pi, \pi] \rightarrow IR$

$$x \rightarrow \frac{\sin x}{2 - \cos x}$$

et construire sa représentation graphique C dans un plan muni d'un repère orthonormé

2) Utiliser la courbe C pour déterminer suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ de l'équation : $m \cos x + \sin x = 2m$

Exercice 13

Dans un plan orienté P muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points A (-2,-3) et B (1,3) et $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 2. Pour tout point M de $\mathcal{C}$ on pose θ une mesure de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$

1) Déterminer les coordonnées de M en fonction de θ

2) Déterminer la position du point M sur le cercle $\mathcal{C}$ pour laquelle $2MA^2 + MB^2$ soit maximal et la position du point M sur le cercle $\mathcal{C}$ pour laquelle $2MA^2 + MB^2$ soit minimal.

Exercice 14

Dans un plan orienté P muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 et le point A(0,1).

Pour tout point M du cercle $\mathcal{C}$ on désigne par θ une mesure de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$. On note N le symétrique de M par rapport à $(O, \vec{j})$.

Déterminer les positions du point M pour lesquelles le produit scalaire $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ est minimal.

Exercice 15

1) On considère l'application f définie sur $[0, 2\pi]$ par $f(x) = \dfrac{2 \sin x}{3 - 2 \cos x}$

Dresser le tableau de variation de f.

Préciser les valeurs exactes du minimum et du maximum de f.

2) Dans un plan orienté P muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A (- R , 0) ; B (R , 0) et C (0 , R) où R désigne un réel strictement positif.

On note (Γ) le cercle de centre C et de rayon R et pour tout point M, on pose x une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CM})$.

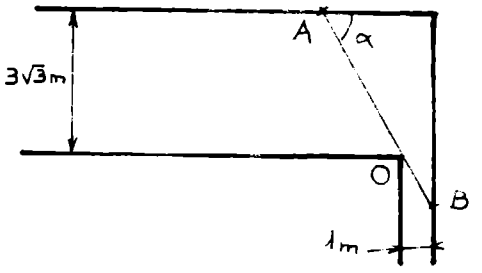
a) Déterminer les coordonnées du point M en fonction de x

b) Déduire $MA^2 - MB^2$, $MA^2 + MB^2$ puis $\dfrac{MA^2 - MB^2}{MA^2 + MB^2}$ en fonction de x .

c) Déterminer le minimum et le maximum de $\dfrac{MA^2 - MB^2}{MA^2 + MB^2}$ lorsque M décrit le cercle (Γ).

Exercice 16

Un couloir de musée de largeur $3\sqrt{3}$ mètres, tourne à angle droit et sa largeur n'est plus que de 1 mètres. On considère la droite variable passant par O et faisant un angle α avec le mur, avec $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, cette droite coupe les deux murs en A et B (voir figure)



1) Exprimer OA et OB en fonction de α.

2) On pose AB = f (α). Calculer f (α) pour tout $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Eudier les variations de f et en déduire la valeur α_0 de α pour laquelle f possède un extrémum. Calculer la valeur de AB correspondante .

3) On veut transporter dans ce couloir un tableau en position verticale. Quelles conséquences pratiques peut on tirer de la question 2.

Corrigés

Exercice 1

1) a) f est définie dérivable sur IR et pour tout réel x on a $f'(x) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

b) $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{7\pi}{6} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{15\pi}{6}$

$f'(x) = 0$ et $x \in \left[\frac{\pi}{6} \quad \frac{7\pi}{6}\right] \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{7\pi}{6}$

x	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{7\pi}{6}$
$\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$	0	−	0	+	0
$f'(x)$	0	−	0	+	0
$f(x)$	1	↘	-1	↗	1

c) f est périodique et de période π. On construit la représentation graphique de la restriction de f à $\left[\frac{\pi}{6} \ , \ \frac{7\pi}{6}\right]$, (qui est un intervalle d'amplitude π). (C) se déduit par les translations de vecteurs $k\pi\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$

f ' est dérivable sur IR et pour tout x réel , $f''(x) = -4\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, f " s'annule et change de signe en $x_k = \frac{-\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$

Les points $A_k\left(\frac{-\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, 0\right)$ $k \in \mathbb{Z}$ sont les points d'inflexions de (C)

2) a) Pour tout x réel on a $f(x) - g(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right)\right)^2$

$= \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1 - 2\sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$

$= \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1 - \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

Donc pour tout x réel g (x) = -1+ f (x) , donc (C') est l'image de (C) par la translation de vecteur $-\vec{J}$

Exercice 3

f est définie sur IR et pour tout x réel on a :

$$f(x) = (\alpha - \beta)\cos^2 x + 2\alpha \sin x \cos x - (\alpha + \beta)\sin^2 x + 2\beta$$

$$= \alpha(\cos^2 x - \sin^2 x) - \beta(\cos^2 x + \sin^2 x) + 2\alpha \sin x \cos x + 2\beta$$

$$= \alpha \cos 2x - \beta + \alpha \sin 2x + 2\beta$$

$$= \alpha(\cos 2x + \sin 2x) + \beta$$

$$= \alpha\sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \beta$$

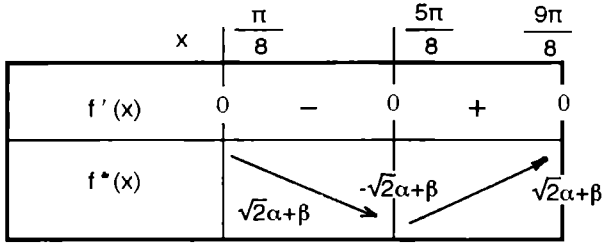
f est dérivable sur IR et pour tout x réel, $f'(x) = -2\sqrt{2}\,\alpha \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

Pour $x \in \left[\frac{\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}\right]$ on a $0 \leq 2x - \frac{\pi}{4} \leq 2\pi$

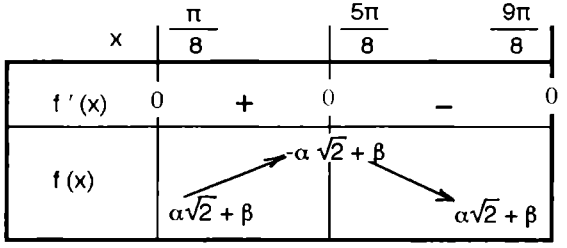
En utilisant le cercle trigonomètrique, on obtient le signe de $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ et par suite :

si $\alpha = 0$ alors f est constante et pour tout x réel $f(x) = \beta$

si $\alpha > 0$ alors le tableau de variation de la restriction de f à $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}\right]$ est :



si $\alpha < 0$ alors le tableau de variation de la restriction de f à $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}\right]$ est :



Pour $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\beta = 0$

f' est dérivable sur IR et pour tout x réel, $f''(x) = -4\cos(2x - \frac{\pi}{4})$

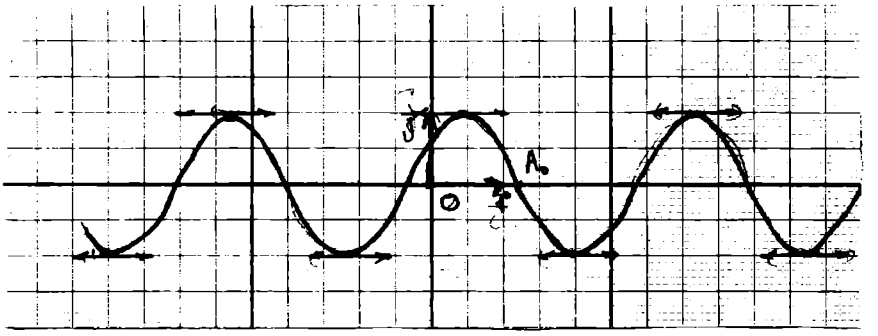
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$

Donc f''(x) s'annule et change de signe en $x_k = \frac{3\pi}{8}\pi + k\frac{\pi}{2}$ pour tout k élément de $\mathbb{Z}$.

Donc les points $A_k(x_k, f(x_k))$ sont des points d'inflexion pour sa courbe représentative.

f est périodique de période π donc sa courbe représentative s'obtient à partir de celle de sa réstriction à $[\frac{\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}]$ par les translations de vecteur $n\pi\vec{i}$, $n \in \mathbb{Z}$.



Exercice 6

2) On a pour tout x réel ; $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = f(x) + \frac{1}{2}$

Donc (C') est l'image de (C) par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{J}$

On a pour tout x réel, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

Soit (Γ) la courbe représentative de la fonction $x \to -\cos^2 x$,

(Γ) est la symetrique de (C') par rapport à $(O, \vec{i})$ et (C") est l'image de (Γ) par la translation de vecteur $\vec{J}$.

Notons t cette translation et S la symétrie par rapport à $(O, \vec{i})$. $\vec{i}$ et $\vec{j}$ étant orthogonaux donc t = S" o S avec S" la symétrie d'axe la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$

Donc $t \circ S = S'' \circ S \circ S = S''$

Donc $(C'') = S''(C')$

Remarque : On pourrait aussi utiliser $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

Exercice 7

Etudier la position relative de (C) et (Γ) revient à étudier le signe de f (x) - g (x) lorsque x décrit $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

$$f(x) - g(x) = \sin 2x - \operatorname{tg} x = 2\sin x.\cos x - \frac{\sin x}{\cos x} \quad \frac{2\sin x}{\cos x} \quad (\cos^2 x - \frac{1}{2})$$

$$= \frac{2\sin x}{\cos x} (\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}) (\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2})$$

Comme $x \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos x > 0$ et $\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$

x	$\frac{-\pi}{2}$		$\frac{-\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
sin x	−	0	−		0	+		0	+
$\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}$	−		0	+		+	0		−
f(x) - g(x)	+	0	−		0	+		0	−

Exercice 9

2) a) On a $\lim_{x \to \frac{\pi^+}{2}} \operatorname{tg} x = -\infty$ donc $\lim_{x \to \frac{\pi^+}{2}} g(x) = 0$

$\lim_{x \to \frac{\pi^-}{2}} \operatorname{tg} x = +\infty$ donc $\lim_{x \to \frac{\pi^-}{2}} g(x) = 0$

Donc $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} g(x) = 0 = g(\frac{\pi}{2})$

Donc g est continue en $\frac{\pi}{2}$

$$x \neq \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \frac{g(x) - g(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{(x - \frac{\pi}{2}) - (x - \frac{\pi}{2}) \operatorname{tg} x} \quad (1)$$

On pose $x - \frac{\pi}{2} = h$; (1) $\Leftrightarrow$ $\frac{2}{h - h \operatorname{tg}(h + \frac{\pi}{2})} = \frac{2}{h + \frac{h}{\operatorname{tg} h}}$

Or x tend vers $\frac{\pi}{2}$ équivaut à h tend vers 0 et par conséquent g et dérivable en $\frac{\pi}{2}$

et $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

b) On montrera que pour tout x élément de $\left]\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ on a : $g(x) = f(x) + 1$.

Exercice 10

1) Les fonction : $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto \sin 2x$ sont définies dérivables sur IR donc f est définie ,

dérivable sur IR et pour tout x réel $f'(x) = 2 - 2\cos 2x = 2(1 - \cos 2x)$

donc pour tout $x \in IR$, $f'(x) \geq 0$ et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$

f'(x) s'annule en des "points isolés", donc f est strictement croissante sur IR

2) Pour tout x réel on a : $\sin 2x \leq 1 \Leftrightarrow$ Pour tout $x \in IR \quad -\sin 2x \geq -1$

$\Leftrightarrow$ Pour tout $x \in IR \quad 2x - \sin 2x \geq 2x - 1$

Ainsi pour tout x réel. $f(x) \geq 2x - 1$

Soit A un réel strictement positif.

Cherchons B réel strictement positif tel que si $x > B$ alors $f(x) > A$

Or $f(x) \geq 2x - 1$ pour tout x réel, donc pour avoir $f(x) > A$ il suffit d'avoir $2x - 1 > A$

c'est à dire $x > \frac{A+1}{2}$ et suffit donc de poser $B = \frac{A+1}{2}$

Conclusion : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

3) On a $f(0) = 0$

Comme f est strictement croisante sur $[-\pi, \pi]$

donc pour tout $x \in [-\pi, 0[\quad f(x) < 0$

donc pour tout $x \in]0, \pi] \quad f(x) > 0$

Exercice 12

1) Pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $\cos x \neq 2$ donc f est bien définie sur $[-\pi, \pi]$

Pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ on a $-x \in [-\pi, \pi]$ et $f(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{2 - \cos(-x)} = \dfrac{-\sin x}{2 - \cos x} = -f(x)$

donc f est impaire

On peut donc l'étudier sur $[0, \pi]$

La fonction : $x \longmapsto \sin x$ est dérivable sur IR , la foncion $x \longmapsto 2 - \cos x$ est dérivable sur IR

et ne s'annulle pas, donc la fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{2 - \cos x}$ est dérivable sur IR donc f est

dérivable sur $[0, \pi]$ et pour tout $x \in [0, \pi]$ $f'(x) = \dfrac{\cos x (2 - \cos x) - \sin^2 x}{(2 - \cos x)^2}$

$$= \frac{2 \cos x - 1}{(2 - \cos x)^2}$$

$f'(x)$ s'annule comme $2 \cos x - 1$ et prend son signe

Tableau de variation de la restriction de f à $[0, \pi]$.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	0 ↗	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	↘ 0

2) m paramètre réel

$$\begin{cases} m \cos x + \sin x = 2m \\ x \in [-\pi, \pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(2 - \cos x) = \sin x \\ x \in [-\pi, \pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{\sin x}{2 - \cos x} \\ x \in [-\pi, \pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad m = f(x) \qquad \textbf{(E)}$$

Résoudre cette équation revient à déterminer l'intersection de (C) et la droite d'équation $y = m$

donc si $m \in]-\infty, \dfrac{-\sqrt{3}}{3}[\cup] \dfrac{\sqrt{3}}{3}, +\infty [$ alors l'équation **(E)** ne possède pas de solutions.

si $m = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ alors **(E)** admet une solution unique $\frac{-\pi}{3}$

si $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$ alors **(E)** admet une solution unique $\frac{\pi}{3}$

si $m = 0$ alors **(E)** admet 3 solutions : $-\pi$, 0 et π

si $m \in]\frac{-\sqrt{3}}{3}, 0[\cup]0, \frac{\sqrt{3}}{3}[$ alors **(E)** admet 2 solutions :

Exercice 13

1) $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct donc M (2cos θ , 2sin θ)

2) pour tout $M \in C$:

$2MA^2 + MB^2 = 2[(-2 - 2\cos\theta)^2 + (-3 - 2\sin\theta)^2] + (1 - 2\cos\theta)^2 + (3 - 2\sin\theta)^2$

$= 48 + 12\cos\theta + 12\sin\theta$

$= 12(4 + \cos\theta + \sin\theta)$

D'autre part M décrit C signifie que θ décrit [0, 2π [.

Soit alors l'application φ définie sur [0, 2π [par $\varphi(\theta) = 12(4 + \cos\theta + \sin\theta)$

φ est dérivable sur [0, 2π [(somme de fonctions dérivables)

pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$, $\varphi'(\theta) = 12(-\sin\theta + \cos) = 12\sqrt{2}\cos(\theta + \frac{\pi}{4})$

θ	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
$\varphi'(\theta)$		+	0	−	0	+	
$\varphi(\theta)$	0	↗	$12(4+\sqrt{2})$	↘	$12(4-\sqrt{2})$	↗	6

Conclusion : $2MA^2 + BM^2$ maximum pour $\theta = \frac{\pi}{4}$ c'est à dire $M(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = M_0$

$2MA^2 + MB^2$ minimum pour $\theta = \frac{3\pi}{4}$ c'est à dire $M(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = M_1$

Exercice 14

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ étant un repère orthonormé direct, donc M est de coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$ et N est de coordonnées $(-\cos\theta, \sin\theta)$.

donc $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta - 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AN} \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ \sin\theta - 1 \end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = -\cos^2\theta + (\sin\theta - 1)^2 = -\cos^2\theta + \sin^2\theta - 2\sin\theta + 1$

$= -\cos^2\theta + \sin^2\theta - 2\sin\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta$

$= 2\sin^2\theta - 2\sin\theta = 2\sin\theta(\sin\theta - 1)$

D'autre part M décrit $\mathcal{C}$ signifie θ décrit $[0, 2\pi[$.

Soit la fonction φ définie sur $[0, 2\pi]$ par $\varphi(\theta) = 2\sin\theta(\sin\theta - 1)$

φ est dérivable sur $[0, 2\pi[$ et pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$, $\varphi'(\theta) = 2\cos\theta(\sin\theta - 1) + 2\sin\theta\cos\theta$

$= 2\cos\theta(2\sin\theta - 1)$

$\begin{cases} \cos\theta \leq \theta \\ \theta \in [0, 2\pi[\end{cases} \Leftrightarrow \theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$; $\begin{cases} 2\sin\theta - 1 \geq 0 \\ \theta \in [0, 2\pi[\end{cases} \Leftrightarrow \theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$

θ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos\theta$	+		+	0	−		−	0	+		
$2\sin\theta - 1$	−	0	+		+	0	−	0	−		
$\varphi'(\theta)$	−	0	+	0	−	0	+	0	−		
$\varphi(\theta)$	0 ↘		$-\frac{1}{2}$ ↗	0	↘		$-\frac{1}{2}$ ↗	4	↘		0

Conclusion :

Le produit scalaire $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ est minimum pour M en $M_0 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} , \frac{1}{2} \right)$ ou en $M_1 \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} , \frac{1}{2} \right)$.

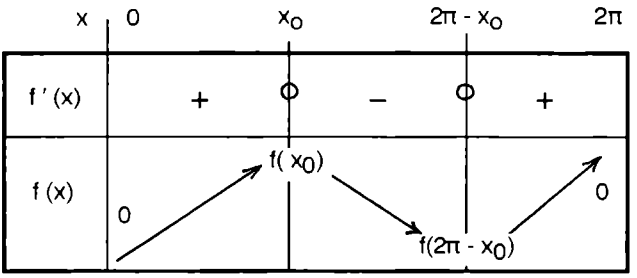
Exercice 15

1) f est définie et dérivable sur [0, 2π] comme étant le quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

Pour tout $x \in [0, 2\pi]$, $f'(x) = 2 \dfrac{\cos x (3 - 2\cos x) - 2 \sin^2 x}{(3 - 2 \sin)^2} = \dfrac{6 (\cos x - \frac{2}{3})}{(3 - 2 \sin)^2}$

Comme $\frac{2}{3} \in]0, 1[$ donc il existe x_0 unique tel que $x_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\cos x = \frac{2}{3}$

on en déduit le signe de $\cos x - \frac{2}{3}$ sur [0, π] et le tableau de variation de f



On a $x_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $\sin x_0 > 0$.

Comme $\cos x_0 = \frac{2}{3}$ donc $\sin x_0 = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ D'où $f(x_0) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$$f(2\pi - x_0) = \frac{2\sin (2\pi - x_0)}{3 - 2 \cos (2\pi - x_0)} = - \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Conclusion : le maximum de f est $M = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ le minimum de f est $m = - \frac{2\sqrt{5}}{5}$

2) On a : $(\vec{i}, \overrightarrow{CM}) = (\vec{i}, \vec{j}) + (\vec{j}, \overrightarrow{CO}) + (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CM}) + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$(\vec{i}, \overrightarrow{CM}) = \frac{\pi}{2} + \pi + x + k\,2\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Donc une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{CM})$ est $x - \frac{\pi}{2}$

donc $\overrightarrow{CM} = R\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\vec{j}\right) = R(\sin x\,\vec{i} - \cos x\,\vec{j})$

donc $\overrightarrow{OM} = R(\sin x.\vec{i} - \cos x.\vec{j}) + \overrightarrow{OC} = R(\sin x\,\vec{i} - \cos x\,\vec{j}) + R\vec{j}$

Soit $\overrightarrow{OM} = R \sin x.\vec{i} + R(1 - \cos x).\vec{j}$

Donc M est de coordonnées (R sinx, R (1 - cosx))

b) A (- R , 0) B (R , 0) M (R sin x , R (1 - cos x)).

Donc $MA^2 - MB^2 = 4R^2 \sin x$ et $MA^2 + MB^2 = 2R^2(3 - 2\cos x)$.

D'où $\frac{MA^2 - MB^2}{MA^2 + MB^2} = \frac{2\sin x}{3 - 2\cos x}$

c) M décrit (Γ) $\Leftrightarrow$ x décrit [0, 2π [.

Donc le minimum de $\frac{MA^2 - MB^2}{MA^2 + MB^2}$ est $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

le minimum de $\frac{MA^2 - MB^2}{MA^2 + MB^2}$ est $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Exercice 16

1) on a $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{OA}$ donc $OA = \frac{3\sqrt{3}}{\sin \alpha}$

$\sin(\hat{B}) = \frac{1}{OB}$ or $\hat{B} = \frac{\pi}{2} - \alpha$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{OB}$ donc $\cos \alpha = \frac{1}{OB}$

d'où $OB = \frac{1}{\cos \alpha}$

2) on a $O \in [A\,B]$ donc $AB = OA + OB$ c'est à dire $AB = \frac{3\sqrt{3}}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}$

Ainsi $f(\alpha) = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sin\alpha} + \dfrac{1}{\cos\alpha}$

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables et ne s'annulent pas sur $]0, \dfrac{\pi}{2}[$ et par suite f est dérivable sur $]0, \dfrac{\pi}{2}[$ et pour tout $\alpha \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$

$$f'(\alpha) = \frac{-3\sqrt{3}\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^3\alpha - (\sqrt{3}\cos\alpha)^3}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{(\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha)(\sin^2\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha + 3\cos^2\alpha)}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$$

Or $\alpha \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$ donc $\sin\alpha \cos\alpha > 0$ et on a aussi $\sin^2 + 3\cos^2 > 0$ et $\sin^2 . \cos^2 > 0$

$$\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha = 2\left(\frac{1}{2}\sin\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right) = 2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$$

$f'(\alpha)$ s'annule et change de signe pour $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$

$$\lim_{\alpha \to 0^+} f(\alpha) = +\infty \quad ; \quad \lim_{\alpha \to \frac{\pi}{2}^-} f(\alpha) = +\infty \quad \text{et} \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 8$$

D'où le tableau de variation de f .

α	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\alpha)$		$-$	0	$+$	
$f(\alpha)$	$+\infty$	↘	8	↗	$+\infty$

3) La longueur du tableau doit être inférieur à 8 m ètres.

DENOMBREMENT

Exercices

Exercice 1 (N.C)

Un sac contient cinq jetons verts numérotés de 1 à 5 et quatre jetons rouges numérotés de 1 à 4.

1) On tire simultanément trois jetons dans le sac.

a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?

b) Combien y a-t-il de tirages ne contenant que des jetons verts ?

c) Combien y-a-t-il de tirages ne contenant aucun jeton vert ?

d) Combien y-a-t-il de tirages contenant au plus 2 jetons verts ?

e) Combien y-a-t-il de tirages contenant un jeton vert et 1 jeton numéro 2 ?

2) Reprendre les mêmes questions dans le cas où l'on tire successivement et sans remise trois jetons du sac.

3) Mêmes questions si les tirages sont successifs et avec remise.

Exercice 2 (N.C)

Dans un jeu de 52 cartes ; on tire simultanément 13 cartes.

Combien a-t-on de tirages contenant :

1) Les quatres Rois

2) Un Roi

3) Au moins un Roi.

4) Un Roi, 4 trèfles et 5 piques

5) Cinq cartes d'une première couleur, 4 d'une seconde couleur, 3 d'une troisième couleur et une carte de la quatrième couleur.

Exercice 3 (N.C)

On jette trois dés A, B et C différenciés par les couleurs, ayant chacun six faces numérotées de 1 à 6.

1) Dénombrer tous les résultats possibles

2) Dénombrer les résultats où les 3 faces sont identiques.

3) Dénombrer les résultats où les 3 faces sont différentes deux à deux.

4) Dénombrer les résultats où les 3 faces ne comprenant aucun 6.

5) Dénombrer les résultats où les 3 faces comprenant un 6.

Exercice 4

Un enfant colorie cinq cases numérotées de 1 à 5 et dispose de huit couleurs qu'il utilise au hasard.

1) Combien de dessins peut-il réaliser ?

2) Combien de dessins peut-il réaliser s'il n'utilise pas deux fois la même couleur ?

3) En utilisant deux couleurs seulement, l'une deux fois et l'autre trois fois ; combien de dessins peut-il réaliser ?

Exercice 5

On admet que le mot le plus long est "anti constitutionnellement".

Combien la langue française contient-elle au maximum de mots ?

Exercice 6

Soit A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} et B = {0, 1, 2, 3, 4, 5}

Combien de nombres de n chiffres peut-on former

a) avec les chiffres de A

b) avec les chiffres de B

Exercice 7

a) Combien peut-on écrire d'entiers naturels de trois chiffres deux à deux distincts avec les entiers 1, 3, 5, 7 et 9.

b) Parmi ces entiers, quel est le nombre de ceux ayant 9 pour chiffre des centaines.

Calculer (sans faires les additions) leur somme.

c) Même question si le chiffre des centaines est 7, puis 5.

Exercice 8

Une maison comporte quatre chambres. Une famille est composée de six membres (2 parents et 4 enfants).

De combien de façon peut-on répartir les membres de cette famille dans chacun des cas suivants :

a) De façon quelconque.

b) En réservant une chambre pour les parents et en utilisant les autres d'une façon quelconque.

c) En réservant une chambre pour les parents et en occupant toutes les autres.

d) En réservant une chambre pour les parents et chacune des autres chambres est occupée par au plus 2 enfants.

Exercice 9

Une classe de 10 garçons et 8 filles décide de monter une pièce de théatre comprenant 3 rôles masculins et deux rôles féminins.

1) On choisit au hasard 3 garçons et deux filles pour former une troupe.

a) Combien y-a-t-il de troupes possibles ?

b) Une fois cette troupe choisie, de combien de façons peut-on distribuer les rôles (ceci sera appelé distribution) ?

2) Ali et Fatma font partie de la classe

a) Quel est le nombre de distributions où Fatma joue dans la pièce ?

b) Quel est le nombre de distributions où Ali et Fatma jouent ensemble ?

c) Quel est le nombre de distributions où ni Ali ni Fatma ne jouent dans la pièce ?

Exercice 10

Un autobus rencontre sur son trajet habituel 5 feux tricolores (vert, orangé et rouge). Ces 5 feux ne sont pas synchronisés et l'on suppose que les aléas de la circulation sont tels que l'état d'un feu devant lequel se présente l'autobus ne dépend pas de l'état des feux précédents.

1) On appelle parcours la suite des 5 feux dans l'état où cet autobus les rencontre.

Par exemple (R,V,O,V,R) représente un parcours où le 1er feu rencontré est rouge le deuxième est vert...

Quel est le nombre de parcours possibles.

2) Quel est le nombre de parcours vérifiant :

a) Tous les feux sont au vert

b) Le premier des feux est vert

c) Tous les feux sauf un sont rouges

d) L'autobus s'arrête au plus 4 fois (cet autobus s'arrête si le feu est orangé ou rouge).

Exercice 11 (N.C)

On dispose de cinq casiers numérotés 1, 2, 3, 4 et 5 et de trois boules portant les lettres a, b et c.

On range les 3 boules dans les cinq casiers. Chaque boule va dans un casier et chaque casier peut contenir aucune boule, une boule ou plusieurs boules.

1) Combien y a-t-il de rangements possibles ?

2) Combien y a-t-il de rangements pour lesquels chaque casier contient au plus une boule ?

3) Combien y a-t-il de rangements pour lesquels le casier n°1 contient 2 boules et le casier n°2 une ?

4) Combien y a-t-il de rangements pour lesquels le casier n°1 ne contient aucune boule ?

5) Dans cette question on suppose que chaque casier ne peut contenir plus d'une boule.

a) Combien y a-t-il de rangements possibles ?

b) Combien y a-t-il de rangements pour lesquels le casier n°1 est vide ?

Exercice 12

Un ascenseur dessert sept étages. Cinq personnes prennent l'ascenseur au rez-de-chaussée.

De combien de façons s'effectuent leurs déscentes dans chacun des cas suivants.

a) Chaque personne est libre de déscendre à l'étage de son choix.

b) Deux personnes au moins descendent au même étage.

c) Deux personnes descendent au même étage, les autres descendent chacune à des étages différents et différents du précédent.

d) Une personne descend à un étage, deux à un autre et les deux derniers à un autre étage.

Exercice 13 (N.C)

On rappelle que les couleurs de l'arc en ciel sont rouge, orange, jaune, vert, bleu, indigo et violet.

Dans chacune de ces couleurs Fatma possède une chemise, une jupe et une paire de chaussettes. Les chemises sont rangées dans un tiroir, les jupes dans un autre tiroir et les chaussettes dans un troisième tiroir.

Fatma n'a pas de préférence de couleur, pour s'habiller elle choisit au hasard dans chaque tiroir.

1) De combien de tenues dispose Fatma ?

2) De combien de façons, peut-elle s'habiller pour que sa tenue soit d'une même couleur ?

3) De combien de façons peut-être s'habiller pour que sa tenue soit tricolore.

Exercice 14 (N.C)

Dans une assemblée de 30 personnes, on choisit un comité formé par un président et 6 membres.

De combien de façons peut-on former un tel comité si :

a) On choisit d'abord le président puis les six membres.

b) On choisit d'abord les six membres puis le président.

c) On choisit sept personnes parmis lesquelles on désigne le président.

Exercice 15 (N.C)

On considère une classe de 16 garçons (6 internes et 10 externes) et 12 filles (4 internes et 8 externes).

On choisit un comité de 5 élèves de cette classe.

1) Combien peut-on former de comités où :

a) Siègent exactement deux garçons

b) Siègent exactement deux internes

c) Siègent exactement deux garçons et deux internes.

2) On suppose dans cette question seulement que le nombre de jeunes filles est inconnu.

Quel doit être ce nombre si on sait que le nombre de comités où siègent deux filles et 3 garçons est 25200 ? (Le nombre de garçons est toujours 16).

3) On suppose que le comité est formé d'un président d'un vice-président et trois membres.

a) Quel est le nombre de tels comités ?

b) Quel est le nombre de tels comités sachant que le président, et le vice-président sont de régime différent (l'un interne, l'autre est externe) ?

Exercice 16

Démontrer que pour tous naturels n et p tels que $n \geq p \geq 1$

On a : $p\,C_n^p = n\,C_{n-1}^{p-1}$

En déduire la somme $S = \sum_{k=1}^{n} k\,C_n^k$

Exercice 17

Démontrer que pour que tous naturels n et p tels que $p \geq 1$ et $n \geq p - 1$ on a :

$$p\, C_{n+1}^{p} = (n + 1)\, C_{n}^{p-1}$$

En déduire la somme $S' = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k$

Exercice 18

Résoudre dans IR l'équation :

(E) $\quad x^2 - x\, C_n^p + C_{n-1}^{p-1}\, C_{n-1}^{p} = 0$

où n et p sont deux entiers tels que $0 < p < n$

Exercice 19

Résoudre dans IN chacune des équations suivantes :

1) $\cdot\ 2\, A_n^2 + 50 = A_{2n}^2$

2) $\cdot\ C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 = \frac{5}{3} n^2 - \frac{4}{3} n$

3) $C_{2n+4}^{3n-1} = C_{2n+4}^{n^2 - 2n + 3}$

Exercice 20

On considère un polygône convexe à n côtés ($n \geq 4$)

1) Combien peut-on construire de diagonales

2) Combien ces diagonales ont-elles, au maximum, de points d'intersection.

Exercice 21

Soit l'ensemble $E = \{0, 1, \ldots n\}$ où $n \in IN^*$

a) Combien y a-t-il de couples (x, y) d'éléments de E avec $x < y$?

Déduisez-en que $\sum_{p=0}^{n} p = C_{n+1}^{2}$

b) Combien y a-t-il de triplets (x, y, z) d'éléments de E avec $x < y < z$? (Pour former un tel triplet on peut choisir arbitrairement y dans E puis on choisira x et z).

Combien y a-t-il de choix possible de x et z ?

En déduire que :

$$\sum_{\substack{a \in \mathbb{N},\, b \in \mathbb{N} \\ a+b=n}} a.b = C_{n+1}^{3}$$

(On lira : la somme des produits de naturels ayant pour somme n, est égale à C_{n+1}^{3})

d) En déduire que $\sum_{p=0} p^2 = \frac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(2n+1)$.

Corrigés

Exercice 4

1) Un desssin est une application de l'ensemble des cinq cases vers l'ensemble des huit couleurs.

Il y a alors 8^5 dessins possibles.

2) S'il n'utilise pas une couleur deux fois, un dessin serait un arrangement de cinq couleurs parmi 8.

Il y a alors $A_8^5 = 6720$ dessins possibles.

3) Dans ces conditions, un dessin est déterminé par le choix de deux couleurs parmi huit (l'ordre intervient dans ce choix car la première couleur sera utilisée trois fois et la seconde deux fois) et par le choix de trois cases parmi cinq pour les colorier avec la première couleur choisie.

Ainsi il y a $A_8^2 . C_5^3$ dessins possibles.

Exercice 5

Un mot de k lettres est une application d'un ensemble de k éléments vers l'ensemble des 26 lettres de l'alphabet.

Alors il y a 26^k mots de k lettres.

Comme le plus long mot est de 25 lettres, alors l'entier k peut prendre toutes les valeurs entières de 1 à 25.

Le nombre de mots que la langue française peut contenir ne dépasse pas :

$$N = \sum_{k=1}^{25} 26^k$$

Soit $N = 26 \left(\frac{26^{25} - 1}{26 - 1} \right) = \frac{26}{25} (26^{25} - 1)$

Exercice 6

a) Il y a 6^n nombres.

b) Un nombre de n chiffres parmi les éléments de B est une application de l'ensemble {1, ... n} vers B à condition que le chiffre le plus à gauche ne soit pas nul.

On a alors 5 choix pour ce chiffre le plus à gauche et six choix pour chacun des autres.

Il y a alors 5.6^{n-1} nombres.

Exercice 7

a) Il y a A_5^3 nombres.

b) Il y a A_4^2 nombres.

On remarque que chacun des chiffres 1, 3, 5 et 7 se repète trois fois en unité et trois fois en dizaines. La somme de ces nombres est alors :

$S = 9.A_4^2.10^2 + 3\,(1+3+5+7)\,.\,10^1 + 3\,(1+3+5+7)$

$= 9 \times 12.10^2 + 3.16.10 + 3.16 = 11328$

Exercice 8

Une manière de répartir cette famille est une application de l'ensemble F des membres de la famille vers l'ensemble C des quatre chambres.

a) Il y a 4^6 manières de répartir la famille d'une façon quelconque.

b) Il y a C_4^1 manières de réserver une chambre aux parents et 3^4 manières de répartir les quatre enfants dans les trois chambres.

Donc il y a $3^4.C_4^1$ possibilités.

c) $C_4^1\,.\,(C_4^2\,C_3^1)\,.\,2\,!$

d) $C_4^1\,.\,(C_4^2\,C_3^1)\,.\,2\,! + C_4^1\,.\,(C_4^2\,C_3^1)\,(C_2^2\,C_2^1)$

Exercice 9

1) a) Une troupe est formée par un couple de combinaisons de 3 garçons parmi 10 et de 2 filles parmi 8.

Soit $C_{10}^{3} . C_{8}^{2}$

c'est à dire il y a 3360 troupes.

b) Pour une troupe donnée, une distribution est un couple de permutations des garçons et des filles.

Soit 3 ! x 2 !

Il y a pour une troupe donnée, 12 distributions possibles.

2) a) Il y a $(C_{10}^{3}.C_{7}^{1})$ troupes où Fatma fait partie de la troupe. Chaque troupe nous donne 3 ! 2 ! distributions.

Alors il y a $(C_{10}^{3}.C_{7}^{1}).3 ! 2 ! = (A_{10}^{3}.A_{7}^{1}).2 !$ distributions où Fatma joue.

b) $(C_{9}^{2}.C_{7}^{1})$ 3 ! 2 !

c) $(C_{9}^{3}.C_{7}^{2})$ 3 ! 2 ! = $A_{9}^{3} A_{7}^{2}$

Exercice 10

1) Un parcours est considéré comme une application de l'ensemble E = {1, 2, 3, 4, 5} des cinq feux vers l'ensemble F = { vert, orangé, rouge }.

Il y a alors 3^5 parcours possibles.

2) a) Il y a un unique parcours où tous les feux sont au vert (comme si l'ensemble F = { vert }).

b) Il y a 3^4 parcours possibles.

c) On choisit un feu parmi cinq, lequel a deux couleurs à prendre.

Il y a alors $C_{5}^{1}.C_{2}^{1}$ possibilités.

d) On considère le parcours où tous les feux sont rouges ou orangés (l'autobus s'arrête cinq fois).

Il y a 2^5 parcours repondant à cette situation.

Alors le nombre de parcours où l'autobus s'arrête au plus 4 fois est :

$$3^5 - 2^5 = 211$$

Exercice 12

Une manière d'effectuer la descente des cinq personnes est équivalente à une application de l'ensemble P des cinq personnes vers l'ensemble E des sept étages.

a) Il y a alors 7^5 manières possibles d'effectuer la descente.

b) On considère les manières où les cinq personnes descendent à des étages deux à deux distincts (applications injectives).

Il y a A_7^5 de telles manières.

Finalement on a $(7^5 - A_7^5)$ manières repondant à la question.

c) $(7\ C_5^2) \times A_6^3$.

d) $(7\ C_5^1)\ (6\ C_4^2)\ (5\ C_2^2)$

Exercice 16

Pour tous naturels n et p tels que $n \geq p \geq 1$ on a :

$$p\ C_n^p = p\ \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n!}{(p-1)!\,(n-p)!} = \frac{n\,(n-1)!}{(p-1)!\,(n-1-(p-1))!} = n\ C_{n-1}^{p-1}$$

$$S = \sum_{k=1}^{n} k\ C_n^k = \sum_{k=1}^{n} n\ C_{n-1}^{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k = n2^n$$

Exercice 17

Pour tous naturels n et p tels que $p \geq 1$ et $n \geq p - 1$ on a :

$$p\,C_{n+1}^{p} = p\,\frac{(n+1)!}{p!\,(n+1-p)!} = (n+1)\,\frac{n!}{(p-1)!\,(n+1-p)!} = (n+1)\,C_{n}^{p-1}.$$

On tire $$\frac{1}{p}\,C_{n}^{p-1} = \frac{1}{n+1}\,C_{n+1}^{p}$$

$$S' = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\,C_{n}^{k} = \sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p}\,C_{n}^{p-1} = \sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{n+1}\,C_{n+1}^{p} = \frac{1}{n+1}\,(2^{n+1} - 1)$$

Exercice 18

On remarque que $$C_{n}^{p} = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p}$$

Donc l'équation (E) est équivalente au système

$$\begin{cases} x + y = C_{n}^{p} \\ x\,y = C_{n-1}^{p-1}\;C_{n-1}^{p} \end{cases}$$

On en déduit que (E) admet les solutions :

$x' = C_{n-1}^{p-1}$ et $x'' = C_{n-1}^{p}$

Exercice 20

1) Une diagonale est définie par la donnée de deux points non consécutifs ; or il existe dans un polygône convexe de n côtés, n droites formées par des points consécutifs.

Ainsi le nombre de diagonales est :

$$\boxed{C_{n}^{2} - n}$$

2) Un point d'intersection de deux diagonales (dans le cas où il existe) est défini par les quatre sommets définissant ces diagonales.

Alors il existe autant de points d'intersection (au maximum) que de parties de quatre éléments de l'ensemble des n sommets du polygône, soit C_n^4

Exercice 21

a) Le problème revient à chercher le nombre des paires de E (en effet la paire {a,b} nous donne les couples (a,b) et (b,a) avec a < b ou b < a).

Donc le nombre de couples (x,y) d'éléments de E avec x < y est C_{n+1}^2

Ces couples (x,y) sont répartis comme suit :

n couples où x = 0

(n - 1) couples où x = 1

(n - 2) couples où x = 2

1 couple où x = n - 1 (donc y = n)

Leur nombre total étant C_{n+1}^2 c'est à dire n + (n - 1) + (n - 2) + ... + 1 = C_{n+1}^2

Soit $\sum_{p=0}^{n} p = C_{n+1}^2$

b) Une partie {a, b, c} de E de trois éléments, nous donnera un triplet unique (x, y, z) où x< y < z.

Donc le problème revient à déterminer le nombre de parties de E de 3 éléments.

Soit C_{n+1}^3

c) Pour y fixé dans E, le réel x peut avoir y choix possibles et z peut avoir (n - y) choix possibles.

Ainsi pour y fixé on a y (n - y) triplets (x, y, z) où x < y < z et y donné

Le nombre total de tels triplets étant C_{n+1}^3

Alors $\sum_{y \in E}^{n} y\,(n - y) = C_{n+1}^{3}$

On pose $y = a$ et $(n - y) = b$

on a $a + b = n$ et $a \in IN$ et $b \in IN$

D'où $\sum_{\substack{y \in IN,\ b \in IN \\ a+b=n}} ab = C_{n+1}^{3}$

d) $\sum_{\substack{y \in IN,\ b \in IN \\ a+b=n}}^{n} ab = \sum_{k \in E}^{n} k\,(n - k) = \sum_{k=0}^{n} k\,(n - k) = \sum_{k=0}^{n} n\,k - \sum_{k=0}^{n} k^2 = C_{n+1}^{3}$

Comme $\sum_{k=0}^{n} n\,k = n \sum_{k=0}^{n} k = n\,C_{n+1}^{2}$

Alors $\sum_{k=0}^{n} k^2 = n\,C_{n+1}^{2} - C_{n+1}^{3} = n\left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right) - \frac{n\,(n+1)\,(n-1)}{6}$

C'est à dire $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$

PROBABILITES

Exercices

Exercice 1 : Problème de Galilée (N.C)

Le prince de Toscane a demandé un jour au physicien Galilée.

"Pourquoi lorsqu'on lance trois dés on obtient plus souvent la somme 10 que la somme 9 bien que ces sommes soient obtenues chacune de six façons différentes ?".

Donner une explication à ce phénomène.

Exercice 2

Calculer la probabilité pour qu'un joueur recevant une main de 8 cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes obtienne :

1) Trois cœurs

2) Quatre valets

3) Huit cœurs

4) Un as et une carte trèfle

5) Quatre cartes d'une couleur, trois d'une autre et une d'une troisième couleur.

Exercice 3

Un dé cubique à ses faces numérotées de 1 à 6.

On sait qu'il est pipé de telle façon que les probabilités p_1 ; p_2 ; p_3 ; p_4 ; p_5 et p_6 d'apparition respectivement des faces numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6 sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $\frac{1}{18}$.

1) Calculer p_i, $1 \leq i \leq 6$

2) Calculer la probabilité d'obtenir un numéro pair.

3) Calculer la probabilité d'obtenir un numéro supérieur ou égal à 4.

Exercice 4 (N.C)

Soit une urne contenant trois boules blanches et deux boules noires.

On suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.

On tire successivement deux boules de l'urne en remettant la boule, si elle est blanche et en la gardant si elle est noire.

Quelle est la probabilité de tirer une blanche une seule fois. (On pourra s'aider d'un arbre de choix).

Exercice 5 (N.C)

Un jeu de 32 cartes est formé de 4 as (as de trèfle , as de coeur , as de pique , as de carreaux) , 4 rois, 4 dames , 4 valets, 4 dix, 4 neuf, 4 huit et 4 sept

on extrait 4 cartes de ce jeu et on appelle main l'ensemble de ces 4 cartes extraites

Calculer la probabilité des évènements suivants :

A : Toutes les cartes sont "coeur"

B : La main ne comporte pas de figure

C : La main est formée d'au moins 3 cartes piques

D : La main est formée d'au plus 2 cartes trêfles

E : La main est formée d'un roi et de 3 cartes coeurs

Exercice 6

On jette deux dés non truqués.

Déterminer la probabilité des événements suivants :

1) La somme des nombres des faces est strictement inférieure à 7

2) La somme des nombres des faces est multiple de 3

3) La somme est strictement inférieure à 7 et divisible par 3.

4) La somme est strictement inférieure à 7 ou divisible par 3.

Exercice 7

Sept couples dont le couple Ettounsi dînent ensemble. On tire au sort quatre personnes pour faire la vaisselle.

1) Quel est le nombre de tirages où aucun homme n'est désigné.

2) Quel est le nombre de tirages où Monsieur Ettounsi est désigné.

3) Quel est le nombre de tirages où le couple Ettounsi est désigné.

4) Quel est le nombre de tirages où il y a strictement plus d'hommes que de femmes.

Exercice 8

On considère un cube ABCDEFGH. Dans une urne il y a 8 jetons portants respectivement les lettres A, B, C, D, E, F, G et H. On tire au hasard et simultanément 3 jetons de l'urne.

Calculer $p(a)$; $p(b)$; $p(c)$; $p(b \cap c)$; $p(b \cup c)$; $p(b \cup c)$

où a, b et c désignent les événements suivants :

a : "les 3 lettres portées par les jetons tirés désignent les sommets d'un triangle équilatéral".

b : "les 3 lettres désignent un triangle isocèle".

c : "les 3 lettres désignent un triangle rectangle".

Exercice 9

Une urne contient six boules blanches numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6 et quatre boules noires numérotées 7,8,9,10, toutes indiscernables au toucher

1) On tire simultanément 3 de ces boules.

Quelle est la probabilité des événements :

A_1 "les 3 boules sont blanches"

A_2 "il y a au moins une boule noire"

2) Après avoir réuni les dix boules dans l'urne, on en tire successivement deux, la première boule étant remise dans l'urne après le tirage, on retient le numéro des deux boules.

Quelle est la probabilité des événements.

A_3 "la valeur absolue de la différence entre les deux numéros tirés est égale à 3"

A_4 "la somme des deux numéros tirés est égale ou inférieure à 5".

Exercice 10

1) Un dé cubique A porte inscrit sur ces faces les nombres -2, -2 ,1 ,1 ,1 , -1 et on suppose qu'à chaque lancer les faces de A ont même probabilité d'apparition

1) On lance le dé A une fois, quelle est la probabilite d'obtenir 1 ?

2) Soit B un autre dé dont les faces portent les nombres -3 ,-2 , -1 ,1 ,2 ,3 de telle sorte

que les probabilités d'apparition respectives de ces nombres soient six termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$

a) Déterminer la probabilité d'apparition de chacune des faces de ce dé

b) On lance simultanément les dés A et B. Quelle est la probabilité pour que la somme des nombres obtenus soit égale à (-1) ?

Exercice 11

Un appareil produit en très grande série, peut être défectueux à cause de deux défauts seulement désignés par A et B.

Dans un lot de 1000 appareils prélevés, on a constaté que 100 appareils présentaient le défaut A (et peut être aussi le défaut B), 80 appareils présentaient le défaut B (peut être aussi le défaut A) et 40 appareils présentaient les défauts A et B simultanément.

Un client achète un des appareils produits.

1) Calculer la probabilité pour que cet appareil ne présente aucun défaut.

2) Calculer la probabilité P_1 pour que cet appareil présente le défaut A seulement.

3) Calculer la probabilité P_2 pour que cet appareil présente le défaut B seulement.

Exercice 12

Une urne contient douze boules numérotées de 1 à 12.

On tire simultanément trois boules de l'urne.

On désigne par a, b et c les numéros des boules tirées avec $a < b < c$

1) Quelles sont les probabilités

a) Pour que "a, b et c soient trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 3."

b) Pour que "a, b et c soient trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 2."

2) Quelles sont les probabilités :

a) Pour que a, b et c soient trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

b) Pour que a, b et c soient trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison un entier.

Exercice 13

I) Une urne contient 9 jetons numérotés de 1 jusqu'a 9.

On en tire au hasard et succéssivement et sans remise 3 jetons et on les dispose de sorte qu'on obtienne un nombre de trois chiffres, le premier jeton tiré est placé à droite, le second au milieu et le troisième est placé à gauche.

1) Calculer la probabilité pour que le nombre obtenu soit pair

2) Calculer la probabilité pour que le nombre obtenu soit inferieur à 300.

3) Calculer la probabilité pour que le nombre obtenu soit pair ou inférieur à 300.

II) On ajoute à l'urne deux jetons numérotés chacun 1 et on effectue l'expérience décrit en I).

Calculer la probabilité d'obtenir un nombre dont au moins deux de ses chiffres sont des "1".

Exercice 14

Dans une loterie de 100 billets, deux d'entre eux sont gagnants.

1) On prend 12 billets, quelle est la probabilité de gagner au moins une fois ?

2) Combien faut il prendre de billets pour que la probabilité de ganger au moins une fois soit strictement supérieure à $\frac{4}{5}$?

Exercice 15

1) Soit la suite (U_p) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_p = p(p+1)(2p+1)$

Montrer par recurrence que pour tout entier naturel non nul n on a :

$$\sum_{p=1}^{n} U_p = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{2}$$

2) Une urne contient 30 boules. Il y'a n boules rouges ($n \geq 1$) et $(n + 1)$ boules blanches, le complément étant constitué de boules vertes.

a) Quelle est la valeur maximale N du nombre de boules rouges dans l'urne.

b) On tire au hasard et successivement et avec remise trois boules de l'urne.

Calculer la probabilité de tirer dans cet ordre une rouge, une blanche, une blanche

Calculer la probabilité de tirer une boule rouge et 2 boules blanches.

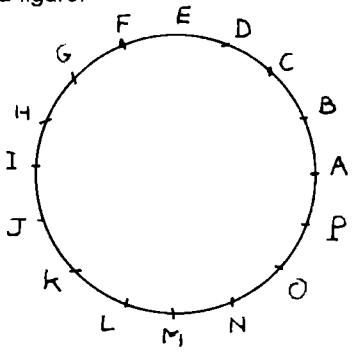
c) La méthode de tirage étant la même qu'en b). On désigne par A_n l'évènement "les 3 boules tirées sont rouges et blanches".

Calculer la probabilité $p(A_n)$ de l'évènement A_n

3) Calculer $\sum_{n=1}^{N} p(A_n)$.

Exercice 16

Un cercle de rayon 2 cm est partagé en 16 arcs de même longueurs par les seize points A, B, C, D .... comme l'indique la figure.



1) Combien peut-on former de triangles ayant pour sommets trois des points employés ci-dessus.

2) On place dans une urne seize boules portant chacune une des seize lettre employées plus haut et l'on tire au hasard et simultanément trois de ces boules.

Calculer les probabilités pour que ces trois lettres désignent les sommets d'un triangle :

a) isocèle

b) non isocèle

c) équilatéral

d) rectangle

e) rectangle et isocèle.

Corrigés

Exercice 2

Chaque éventualité correspond à une partie de 8 éléments pris dans un ensemble à 32 éléments et réciproquement donc card $\Omega = C_{32}^{8}$

1) $p(A) = \dfrac{C_8^3 \, C_{24}^5}{C_{32}^8}$

2) $P(B) = \dfrac{C_{28}^4}{C_{32}^8}$

3) $p(C) = \dfrac{1}{C_{32}^8}$

4) $p(D) = \dfrac{C_1^1 C_{21}^7 + C_3^1 C_7^1 C_{21}^6}{C_{32}^8}$

5) **Choix des couleurs**

On a quatre possibilités de choisir la première couleur, la seconde couleur a trois possibilités et la troisième couleur en a deux.

Il y a ainsi A_4^3 choix de couleurs possibles.

Le choix des couleurs étant fait, on a :

C_8^4 possibilité pour la première couleur

C_8^3 possibilité pour la seconde couleur

C'_8 possibilité pour la troisième couleur

D'où $p(E) = \dfrac{A_4^3 \, C_8^4 \, C_8^3 \, C_8^1}{C_{32}^8}$

Exercice 3

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1 \Leftrightarrow 6\,p_1 + \frac{15}{18} = 1 \Leftrightarrow p_1 = \frac{1}{36}$$

d'où $p_1 = \frac{1}{36}$; $p_2 = \frac{3}{36}$; $p_3 = \frac{5}{36}$; $p_4 = \frac{7}{36}$; $p_5 = \frac{1}{4}$; $p_6 = \frac{11}{36}$

2) $p = p_2 + p_4 + p_6 = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$

$p' = p_4 + p_5 + p_6 = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$

Exercice 6

Pour les questions 1, 2 et 3, utiliser la table suivante qui donne la somme des nombres des faces :

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Exercice 7

Chaque éventualité correspond à une partie de 4 éléments pris dans un ensemble de 14 éléments.

$$\text{card } \Omega = C_{14}^{4}$$

1) card (A) = C_7^4 $\Leftrightarrow$ $p(A) = \dfrac{C_7^4}{C_{14}^4}$

2) card B = C_{13}^3 $\Leftrightarrow$ $p(B) = \dfrac{C_{13}^3}{C_{14}^4}$

3) card C = C_{12}^2 $\Leftrightarrow$ $p(C) = \dfrac{C_{12}^2}{C_{14}^4}$

4) D : trois hommes et une femme ou quatre hommes

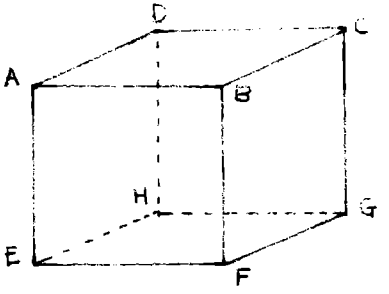
card D = $C_7^3 C'_7 + C_7^4$ $\Leftrightarrow$ $p(D) = \dfrac{C_7^3 C'_7 + C_7^4}{C_{14}^4}$

Exercice 8

Un tirage est un sous ensemble de 3 éléments de l'ensemble { A, B, D, C, E, F, G, H }

donc l'univers Ω est tel que card $\Omega = C_8 = 56$

Les tirages se font au hasard donc p est une probabilité uniforme.



$p(a) = \dfrac{\text{card a}}{\text{card } \Omega} = \dfrac{1}{7}$

$p(b) = \dfrac{\text{card b}}{\text{card } \Omega} = \dfrac{4}{7}$

$p(c) = \dfrac{\text{card c}}{\text{card } \Omega} = \dfrac{6}{7}$

$$p(b \cap c) = \frac{\text{card}(b \cap c)}{\text{card}\,\Omega} = \frac{3}{7}$$

$$p(b \cup c) = p(b) + p(c) - p(b \cap c) = \frac{4}{7} + \frac{6}{7} - \frac{3}{7} = 1$$

$$p(\bar{b} \cup c) = p(c) = \frac{6}{7}$$

Exercice 9

1) Chaque éventualité correspond à une partie de 4 éléments pris dans un ensemble de dix éléments.

Donc $\text{card}\,\Omega = C_{10}^{3}$

$$\text{card}(A_1) = C_6^3 \quad \Leftrightarrow \quad p(A_1) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}$$

$$A_2 = \bar{A_1} \quad \Leftrightarrow \quad p(A_2) = 1 - p(A_1) = \frac{5}{6}$$

L'univers Ω' dans ce cas est équivalent à l'ensemble des applications de { a, b } vers l'ensmble des dix boules.

Donc $\text{card}\,\Omega' = 10^2$

On vérifie que $p(A_3) = \frac{14}{100} = \frac{7}{50}$

On vérifie que $p(A_4) = \frac{8}{100}$

Exercice 10

1) On vérifie que $\text{card}\,\Omega = 6$

$$\text{card}(A) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad p(A) = \frac{1}{2}$$

2) p_1 : La probabilité d'appartion de (-3)

p_2 : La probabilité d'appartion de (-2)

p_3 : La probabilité d'appartion de (-1)

p_4 : La probabilité d'appartion de (1)

p_5 : La probabilité d'appartion de (2)

p_6 : La probabilité d'appartion de (3)

a) $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$

$$\Leftrightarrow \quad p_1 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad p_1 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^6}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{364}{243} p_1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad p_1 = \frac{243}{364}$$

$$p_2 = \frac{81}{364} ; \quad p_3 = \frac{27}{364} ; \quad p_4 = \frac{9}{364} ; \quad p_5 = \frac{3}{364} ; \quad p_6 = \frac{1}{364}$$

b) La somme des nombres obtenus est (- 1)

$$\begin{cases} A : -2 \quad \text{et} \quad B : 1 \\ A : 1 \quad\quad\quad B : -2 \end{cases}$$

$$p = \frac{2}{6} p_4 + \frac{1}{2} p_2 = \frac{3}{364} + \frac{81}{728} = \frac{87}{728}$$

Exercice 12

Le tirage étant simultané, donc chaque éventualité correspond à une partie de 3 éléments pris dans un ensemble de 12 éléments, donc card $\Omega = C_{12}^3 = 220$.

a) $A = \{\{1, 4, 7\} ; \{2, 5, 8\} ; \{3, 6, 9\} ; \{4, 7, 10\} ; \{5, 8, 11\} ; \{6, 9, 12\}\}$

donc $p(A) = \frac{6}{220} = \frac{3}{110}$

b) $B = \{\{1, 2, 4\} ; \{2, 4, 8\} ; \{3, 6, 12\}\}$

donc $p(B) = \frac{3}{220}$

2) a) On vérifie que card C = 30 d'où $p(C) = \frac{3}{22}$

b) $D = B \cup \{\{1, 3, 9\}\}$ donc $p(D) = \frac{4}{220} = \frac{1}{55}$

Exercice 13

I) Le tirage étant successif et sans remise donc chaque éventualité correspond à un arrangement de 3 éléments d'un ensemble à 9 éléments et réciproquement :

donc card $\Omega = A_9^3 = 9.8.7 = 504$

1) Pour que le nombre obtenu soit pair il faut et il suffit que son dernier chiffre soit égal à 2 ; 4 ; 6 ou 8.

Donc card (A) = 8.7.4 d'où $p(A) = \frac{8.7.4}{504} = \frac{4}{9}$

2) Pour que le nombre obtenu soit inférieur à 300 il faut que son chiffre des centaines soit égal à 1 ou 2 donc card (B) = 2.7.8

$$p(B) = \frac{2.7.8}{504} = \frac{2}{9}$$

3) C : "Le nombre est pair ou inférieur à 300".

On a $C = A \cup B$

D'où $p(C) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

A ∩ B : "Le nombre est pair et inférieur à 300"

On a 7.4 nombres pairs de 3 chiffres dont le chiffre des centaines est 1.

On a 7'.3 nombres pairs de 3 chiffres dont le chiffre des centaines est 2.

Donc $p(A \cap B) = \frac{7 \cdot 4 + 7.3}{504} = \frac{7}{72}$

D'où $p(C) = \frac{41}{72}$

II) On vérifie que $p(E) = 3. \frac{3.2.8}{11.10.9} + \frac{3.2.1}{11.10.9} = \frac{5}{33}$

Exercice 14

On suppose la loterie non truquée et on utilise l'équiprobabilité P.

L'univers Ω associé à cette épreuve est tel que card $\Omega = C_{100}^{12}$

• Soit A l'événement : "On gagne au moins une fois".

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{\text{card } \bar{A}}{\text{card } \Omega} = 1 - \frac{C_{98}^{12}}{C_{100}^{12}} = \frac{561}{2475}$$

2) Appelons p le nombre de billets pris.

La probabilité de gagner au moins une fois est :

$$q = 1 - \frac{C_{98}^{p}}{C_{100}^{p}} = \frac{C_{100}^{p} - C_{98}^{p}}{C_{100}^{p}} \quad ; \quad p \in \{1, 2, \ldots, 99, 100\}$$

$$q = \frac{99 \cdot 100 - (99 - p)(100 - p)}{99 \cdot 100} = \frac{-p^2 + 199\,p}{9900}$$

$$q > \frac{4}{5} \quad \text{signifie} \quad \frac{-p^2 + 199\,p}{9900} > \frac{4}{5}$$

$$\text{signifie} \quad p^2 - 199\,P + 7920 < 0$$

Soit l'équation (E) : $x^2 - 199x + 7920 = 0$

$\Delta = 199^2 - 4 \times 7920 = 7921 = 89^2$

Les racines de (E) sont : $x' = \dfrac{199 + 89}{2} = 144$ et $x'' = \dfrac{199 - 89}{2} = 55$

D'où le tableau de signes

x	$-\infty$		55		144		$+\infty$
$x^2 - 199x + 7920$		+	0	−	0	+	

Comme $p \in \{1, 2, 3, ... 100\}$, donc $q > \dfrac{4}{5}$ signifie $p \in \{56, 57, ... 99, 100\}$.

Exercice 15

2) a) $30 - (n + (n + 1)) \geq 1 \Leftrightarrow 29 - 2n \geq 1 \Leftrightarrow n \leq 14$

N = 14

b) Soit A l'événement . une rouge puis deux blanches".

$$p(A) = \frac{n\,(n + 1)\,(n + 1)}{27\,000} = \frac{n\,(n + 1)^2}{27\,000}$$

Soit B l'événement "Tirer une rouge et deux blanches"

$$p(B) = \frac{3n\,(n + 1)^2}{27\,000} = \frac{n\,(n + 1)^2}{9\,000}$$

Pour $n \geq 1$, A_n : "Tirer une rouge et deux blanches ou une blanche et deux rouges

$$p(A_n) = \frac{3n\,(n+1)\,(n+1)}{27\,000} + \frac{3n \,.\, n\,(n+1)}{27\,000}$$

$$p(A_n) = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{9\,000} = \frac{U_n}{9\,000}$$

3) $\sum_{n=1}^{14} p(A_n)$

$$= \frac{1}{9\,000} \sum_{1}^{14} U_n$$

$$= \frac{1}{9\,000}\left[\frac{14 \,.\, 16 \,.\, 15^2}{2}\right] = \frac{14}{5}$$

Exercice 16

Tout triangle correspond à une partie de 3 éléments d'un ensemble de 16 éléments (et réciproquement).

Donc le nombre de triangles qu'on peut former est C_{16}.

2) L'univers Ω est tel que card $\Omega = C_{16}$

a) Tout point des seizes sommets donne 7 triangles isocèles

Donc le nombre de triangles isocèles est $7.16 = 112$

d'où $p(A) = \frac{112}{560} = \frac{1}{5}$

b) $p(B) = 1 - p(A) = \frac{4}{5}$

c) Un triangle est rectangle si l'un de ses côtés est un diamètre.

Tout diamètre donne 14 triangles rectangles.

Donc le nombre de triangles rectangles est $14.8 = 112$

D'où $p(C) = \frac{112}{560} = \frac{1}{5}$

d) $p(D) = \frac{16}{560} = \frac{1}{35}$

Sommaire

1 Suites réelles 5

2 Limites et continuité 32

3 Dérivabilité, extrema et sens de variation 50

4 Fonctions polynomes du type :

$ax^2 + bx + c$ * $ax^3 + bx^2 + cx + d$ * $ax^4 + bx^2 + c$ 74

5 Exemples de fonctions rationnelles 99

6 Exemples de fonctions trigonométriques 130

7 Dénombrement 148

8 Probabilités 164

دار آفاق للنشر و التوزيع
ص ب 4 منفلوري - 1089 تونس الشابي
(01) 222 431 : ☎

Exercices et Problèmes Corrigés de mathématiques

6e maths - sc-exp. - tech.

Prix : 4D,200